Técnicas de Demonstração

Níckolas de Aguiar Alves

Resumo: Este documento é uma breve introdução às principais técnicas de demonstrações matemáticas para estudantes de Física. É recomendada uma exposição prévia a alguns assuntos de Cálculo (como a definição formal de limite), mas o texto tem o objetivo de ser tão autocontido quanto possível. A princípio são estudadas, por meio de exemplos utilizando números inteiros, as técnicas de prova direta, por absurdo, por contrapositiva e por indução, além de alguns símbolos comuns em demonstrações matemáticas. A seguir, algumas destas técnicas são utilizadas para mostrar como os procedimentos usuais de cálculo de limites se relacionam com a definição formal.

Palavras-chave: Técnicas de Demonstração, Números Inteiros, Cálculo.

Versão: 15 de abril de 2022.

Sumário

> Deve ficar claro que não há conteúdo real nessas demonstrações: tudo que é preciso para fazer uma demonstração é não se confundir.
>
> Geroch 1985, p. 6.

1 Por que demonstrar?

Ao entrar em contato com demonstrações matemáticas pela primeira vez, não é incomum que estudantes sintam que estão passando muito tempo se ocupando de tarefas inúteis e complicadas para concluir o que, a princípio, é óbvio. Assim, antes de mais nada vamos discutir o porquê de demonstrações matemáticas, e rigor em geral, serem uma preocupação relevante.

1.1 Princípio de Explosão

Consideremos a expressão

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots . \tag{1.1}$$

Quanto vale S?

A princípio, é possível que você pense que o resultado é $S = 1$. De fato,

$$\begin{aligned} S &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots , && (1.2a)\\ &= (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots , && (1.2b)\\ &= 0 + 0 + 0 + \cdots , && (1.2c)\\ &= 0. && (1.2d) \end{aligned}$$

Contudo, você também pode perceber que $S = 1$. Realmente, temos que

$$\begin{aligned} S &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots , && (1.3a)\\ &= 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots), && (1.3b)\\ &= 1 - [(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots], && (1.3c)\\ &= 1 - [0 + 0 + 0 + \cdots], && (1.3d)\\ &= 1 - 0, && (1.3e)\\ &= 1. && (1.3f) \end{aligned}$$

Vemos também que $S = 2$, pois

$$\begin{aligned} S &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots , && (1.4a)\\ &= 1 + 1 - 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots , && (1.4b)\\ &= 2 - 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots . && (1.4c) \end{aligned}$$

Como $\cdots$ inclui infinitos termos, podemos trazer cada $+1$ "um passo" para a frente. Como há infinitos, todos os espaços ficam preenchidos e temos

$$\begin{aligned} S &= 2 - 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots , && (1.5a)\\ &= 2 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots , && (1.5b)\\ &= 2 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots), && (1.5c)\\ &= 2 - [(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots], && (1.5d)\\ &= 2 - [0 + 0 + 0 + \cdots], && (1.5e)\\ &= 2 - 0, && (1.5f)\\ &= 2. && (1.5g) \end{aligned}$$

Não bastando isso, podemos ver também que $S = \frac{1}{2}$, pois

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots , \tag{1.6a}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots), && (1.6b)\\
&= 1 - S, && (1.6c)\\
2S &= 1, && (1.6d)\\
S &= \frac{1}{2}. && (1.6e)
\end{aligned}
$$

Uma conclusão particularmente interessante pode ser tirada destes cálculos. Acima, vimos que $1 = S = 2$, *id est*, que $1 = 2$. Considere o conjunto $\{\text{Níck}, \text{Papa}\}$. Este conjunto tem 2 elementos, mas como $2 = S = 1$, ele contém um único elemento. Logo, Níck é o Papa*.

Os múltiplos valores distintos que obtivemos e a conclusão de que eu sou o papa são todos exemplos do chamado *princípio de explosão*: dada uma afirmação falsa, qualquer afirmação, verdadeira ou falsa, segue. A demonstração pode ser um pouco abstrata e não é profundamente relevante para o que segue, mas a incluímos por completeza.

Teorema 1 [Princípio de Explosão]**:**
Seja A uma afirmação verdadeira. $\neg A$ (a negação de A) implica em qualquer afirmação B. □

Demonstração:
Suponha que A seja uma afirmação verdadeira e $\neg A$ ("não A", isto é, a negação de A) também o seja. Como A é verdadeiro, a afirmação $A \vee B$ ("A ou† B") é também verdadeira, qualquer que seja a afirmação B. Contudo, como $\neg A$ é verdadeira, é impossível que A seja verdadeiro. Assim, de $A \vee B$ ser verdadeiro segue que é preciso que B seja verdadeiro. ■

Como a demonstração é profundamente abstrata, tomemos um exemplo.

Exemplo:
Vamos tomar A como sendo a afirmação "todo homem é mortal". $\neg A$ é então "nem todo homem é mortal", que pode ser reescrito como "existem homens imortais". Tomemos B, por exemplo, como "o céu é verde". Lembre-se que sabemos que "todo homem é mortal" é verdade e estamos assumindo que "existem homens imortais" também é verdade.

Como todo homem é mortal, a frase "todo homem é mortal ou o céu é verde" é verdade. Contudo, como assumimos que existem homens imortais, a frase "todo homem é mortal ou o céu é verde" só pode ser verdadeira se "o céu é verde" for verdade. Logo, concluímos que o céu é verde. ♥

Os argumentos podem ser um tanto confusos em um primeiro contato, pois o ponto principal é exatamente o como uma contradição leva a qualquer coisa. Logo, o argumento de fato envolve algumas contradições ao longo do caminho que podem causar um certo incômodo. Como ilustração, podemos ainda chegar à mesma conclusão do exemplo usando a falsidade $2 = 1$ como um auxílio.

---

* Este argumento é amplamente atribuído a Bertrand Russell.

† Em Matemática, a palavra "ou" é quase sempre inclusive, ou seja, "A ou B" é verdade quando pelo menos um dos dois for verdade, independentemente de ser apenas um dos dois ou ambos ao mesmo tempo.

Exemplo:

Considere o conjunto de todos os homens imortais. Como todo homem é mortal, este conjunto tem zero elementos. Porém, como existem homens imortais, este conjunto possui $N > 0$ elementos, onde N é o número de homens imortais que existem. Assim, temos que $0 = N$. Dividindo por N dos dois lados, temos $0 = 1$ e somando 1 dos dois lados temos $1 = 2$. Tomando o conjunto formado pelas cor do céu (seja lá qual for) e pela cor verde, vemos que tem 2 elementos, mas como $2 = 1$ ele tem apenas um elemento. Logo, a cor do céu é verde. ♥

Assim, vemos que assumir resultados falsos pode levar a quaisquer resultados. Note que os exemplos anteriores poderiam nos levar a resultados verdadeiros: se trocássemos a cor "verde" por "azul", ainda concluiríamos pelos mesmos argumentos que o céu é azul. Contudo, podemos igualmente concluir qualquer falsidade e deixamos de ter "poder preditivo".

Por conta disso, é importante e relevante lidar com Matemática de maneira rigorosa. A cautela em demonstrar cuidadosamente os resultados nos impede de chegar a conclusões falsas, a partir das quais podemos concluir qualquer coisa. Além disso, essa mesma cautela nos permite identificar hipóteses falsas no que fazemos e assim prevenir que cheguemos a conclusões absurdas.

Resta entender o que estava ocorrendo com a expressão que consideramos no início desta seção. Por que conseguimos concluir tantos resultados distintos para a mesma coisa?

O problema estava na hipótese falsa de que podemos tratar o infinito como um número real. Isso nos sugeriu que poderíamos reordenar a soma (o que nos permitiu obter qualquer valor que desejássemos) e, mais profundamente, nos fez crer implicitamente que existe algum número que possa ser atribuído a S. A soma que exibimos é, na verdade, uma soma divergente. Ela é definida como

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n = \lim_{N\to+\infty}\left[1-1+1-1+1-1+\cdots+(-1)^N\right], \tag{1.7}$$

sendo que o limite não existe. Assim, o simples fato de assumir que S seria um número real já estava incorreto. A partir dessa hipótese falsa, poderíamos provar que todas as manipulações que fizemos são legítimas (visto que de uma hipótese falsa tudo segue), mas todo o processo de cálculo foi então baseado em uma mentira.

Este exemplo é inspirado em Tao 2016, Sec. 1.2, que também contém diversos outros exemplos de complicações. Os omitimos aqui, visto que muitos são exemplos que utilizam conceitos mais elaborados de Cálculo e, portanto, fogem ao escopo deste texto.

1.2 Aritmética Modular

Um segundo exemplo de por que o rigor é interessante se baseia mais fortemente em curiosidade. Tome, por exemplo, a afirmação "4 é diferente de 0" (Tao 2016, Proposition 2.1.6). Em primeira observação, este pode parecer um resultado óbvio e desinteressante, mas há como encontrar um pouco mais de profundidade nele.

Considere, por exemplo, um relógio digital que marca 19 h. Em cinco horas, que horas serão? Embora $5 + 19 = 24$, sabemos que cinco horas após 19 h será, na verdade, 0 h. Isto porque o relógio segue regras aritméticas diferentes e opera de modo que 0 e 24 são, na verdade, equivalentes. A aritmética do relógio é um tipo de aritmética modular, em que temos que 0 é equivalente a algum outro natural e, portanto, os números "dão a volta" em si mesmos.

Claro, os naturais em sua forma convencional e a aritmética modular do relógio não são intrinsecamente melhores ou piores uns que os outros, apenas possuem propriedades distintas. É curioso, contudo, entendermos em que exatamente o relógio viola as regras dos números naturais para possibilitar esse tipo de comportamento. Em outras palavras, o que diferencia os números no relógio dos números naturais? Infelizmente, esta pergunta foge ao escopo deste texto, mas Milies e Coelho 2006; Tao 2016 podem trazer um pouco de paz a leitores incomodados.

2 Técnicas de Demonstração

Crendo estar clara a motivação para nos preocuparmos com demonstrações, vamos a algumas das principais técnicas utilizadas para fazer demonstrações matemáticas.

2.1 Redução ao Absurdo

> A demonstração é por *reductio ad absurdum* e *reductio ad absurdum*, que Euclides tanto amava, é uma das melhores armas de um matemático. É um gambito muito melhor que qualquer gambito de xadrez: um enxadrista pode oferecer o sacrifício de um peão ou mesmo uma peça, mas um matemático oferece *o jogo*.
>
> Hardy 2013, p. 93.

Uma das principais técnicas para demonstrar resultados é a chamada redução ao absurdo (*reductio ad absurdum*, em latim). A ideia consiste em assumir que o que se deseja demonstrar é, na verdade, falso, e disso concluir algo obviamente falso. Para ilustrar, vamos utilizar dois resultados mencionados, por exemplo, em Hardy 2013. O primeiro é um famoso teorema atribuído a Euclides: existem infinitos números primos.

Definição 2 [Número Primo]**:**

Seja $p \in \mathbb{N}$, onde $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números naturais. Dizemos que p é *primo* se for diferente de 0 e 1 e não for divisível por nenhum natural além de 1 e si mesmo, ou seja, se não existir nenhum par de números $a, b \in \mathbb{N}$ com $p \neq a \neq 1$ (e o mesmo para b) tais que $p = ab$. ♠

Exemplo:

Os primeiros números primos são 2, 3, 5, 7, 11, *et cetera*. ♥

Exercício 2.1:

Mostre que 4, 6, 8, 9, 10 e 12 não são primos encontrando um exemplo explícito de divisor. Por exemplo, $15 = 5 \cdot 3$, o que prova que 15 não é primo. ✠

Perceba que todo número maior que 2 que não é primo pode ser decomposto em fatores primos, ou seja, todo número maior que 2 que não é primo é divisível por primos. Este resultado decorre do chamado Teorema Fundamental da Aritmética (veja, *exempli gratia*, Milies e Coelho 2006). Não o demonstraremos, mas o assumiremos como dado para permitir que estudemos o exemplo a seguir de demonstração por absurdo.

Teorema 3:

Existem infinitos números primos. □

Demonstração:

Queremos fazer a demonstração por absurdo, então vamos assumir que existem finitos números primos. Neste caso, existe um maior número primo, que chamaremos de p. Nosso objetivo ao fazer essa hipótese é chegar em alguma contradição e, a partir dela, concluir que nossa premissa de que há finitos números primos estava errada.

Como queremos chegar a um absurdo, precisamos chegar a um número primo que seja maior que p. Para isso, precisamos construir um número que seja maior que todos os primos, mas não seja divisível por nenhum. Um número que certamente é divisível por todos os primos é

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p, \tag{2.1}$$

que nada mais é do que o produto de todos os primos. Contudo, podemos agora adicionar 1 a esse número para obter

$$q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p + 1. \tag{2.2}$$

Este número não pode ser dividido por nenhum número primo. De fato, ao tentar dividir q por qualquer primo, sempre teremos resto 1. Assim, q é primo. Porém, por construção, $q > p$. Chegamos desta forma a um absurdo, o que demonstra que a nossa hipótese inicial (de que há finitos primos) está errada. Logo, existem infinitos números primos. ■

Essa demonstração ilustra a ideia básica por trás da redução ao absurdo: assume-se que a hipótese está errada e prova-se que isto conduz a um resultado absurdo (no caso, mostramos que existia um primo maior que o maior dos primos). Além disso, ela também ilustra algumas outras características de demonstrações. A construção do número q, por exemplo, pode parecer um tanto quanto arbitrária. Como alguém poderia ter a ideia de usar este q em particular? Estes elementos de criatividade fazem parte de demonstrações matemáticas, mas são aprendidos com o tempo. Diferentes áreas da Matemática tendem a ter diferentes truques nestes sentidos e ganhar experiência em uma certa área é a única forma (que eu conheço, ao menos) de aprender a perceber estas ideias. Elas eventualmente se tornam mais naturais (na maioria dos casos) após um certo tempo de prática. Quando não são tão naturais, por vezes a história honrando quem as percebeu ao nomear o teorema.

Como um segundo exemplo, vamos provar que a raiz quadrada de 2 não é um número racional. Por completude, primeiro relembramos as definições relevantes.

Definição 4 [Raiz Quadrada]**:**
Seja $x \in \mathbb{R}$, com $x > 0$. Um número $y \in \mathbb{R}$ é dito ser *a raiz quadrada de x* se, e somente se, $y^2 = x$ e $y \geq 0$. Denotamos $\sqrt{x} \equiv y$. Note que, em nossa convenção, a raiz quadrada de um número nunca é negativa. ♠

Definição 5 [Número Racional]**:**
Dado um número $r \in \mathbb{R}$, dizemos que r é *racional* se houverem números inteiros p e q tais que q não seja nulo e $r = \frac{p}{q}$. ♠

Sempre é possível tomar p e q na definição acima de modo que seu máximo divisor comum* seja 1. Por exemplo, podemos escrever $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, $\frac{20}{10} = \frac{2}{1}$, $\frac{63}{42} = \frac{3}{2}$ e assim por diante. Novamente, não vamos demonstrar esse fato, mas o assumiremos na demonstração a seguir.

Teorema 6:
A raiz quadrada de dois é irracional, ou seja, não é racional. □

Demonstração:
Por absurdo, assuma que existam dois inteiros p e q cujo máximo divisor comum é 1 tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Por consequência, vemos que

$$2 = \frac{p^2}{q^2}, \tag{2.3a}$$
$$2q^2 = p^2, \tag{2.3b}$$

e portanto p^2 é par. p^2 só pode ser par se p for par, o que prova que p é par.

Se p é par, então existe algum número r tal que $p = 2r$. Logo,

$$2q^2 = p^2, \tag{2.4a}$$
$$2q^2 = (2r)^2, \tag{2.4b}$$
$$2q^2 = 4r^2, \tag{2.4c}$$
$$q^2 = 2r^2. \tag{2.4d}$$

Assim, q^2 também é par, implicando que q é par.

Como tanto p quanto q são pares, vemos que ambos são divisíveis por 2. Porém, havíamos assumido que o maior número que podia dividir tanto p quanto q é 1, e assim chegamos a um absurdo. Logo, não existem p e q tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, provando que a raiz quadrada de 2 é irracional. ■

Vamos a mais um exemplo, também inspirado em números primos.

*O máximo divisor comum de dois números inteiros é o maior inteiro que divide ambos ao mesmo tempo. Por exemplo, o máximo divisor comum de 6 e 8 é 2; o de 10 e 20 é 10; o de 42 e 63 é 21 e assim por diante.

Proposição 7:

Todo número primo maior que 3 *é vizinho de um múltiplo de* 6*, ou seja, para todo primo* $p > 3$*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $p = 6n + 1$ *ou* $p = 6n - 1$*.* □

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que a conclusão é falsa. Ou seja, suponhamos que existe algum primo $p > 3$ tal que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $p \neq 6n \pm 1$. Isto significa que existe algum natural m e algum $r \in \{0, 2, 3, 4\}$ tal que

$$p = 6m + r. \tag{2.5}$$

m é dado pela divisão inteira de p por 6 e r é o resto desta divisão. Note que, para $r \in \{0, 2, 3, 4\}$, $6m + r = p$ é divisível por 2, e portanto não é primo. Absurdo, dado que p é primo por hipótese. Resta a possibilidade $r = 3$. Porém, se $p = 6m + 3$ para algum natural m, p é divisível por 3 e portanto não é primo. Absurdo. Logo, a hipótese inicial de que p não é vizinho de um múltiplo de 6 há de ser falsa.

Perceba que esta demonstração falha nos casos $p \in \{2, 3\}$, visto que nestes casos p é ainda divisível apenas por 1 ou por si mesmo. ■

2.2 Prova Direta

Provas diretas consistem em demonstrar um resultado de maneira direta, sem nenhum "truque lógico" em particular.

Proposição 8:

Seja $a \in \mathbb{R}$ *tal que, para todo* $x \in \mathbb{R}$*,*

$$a + x = x + a = x. \tag{2.6}$$

Então $a = 0$*.* □

Demonstração:

Note que, das propriedades de a, sabemos que

$$a + 0 = 0 + a = 0. \tag{2.7}$$

Contudo, sabemos das propriedades do 0 que

$$0 + a = a + 0 = a. \tag{2.8}$$

Logo, concluímos que $0 = 0 + a = a$. ■

Por vezes podemos reorganizar uma prova por absurdo em uma prova direta.

Proposição 7:

Todo número primo maior que 3 *é vizinho de um múltiplo de* 6*, ou seja, para todo primo* $p > 3$*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $p = 6n + 1$ *ou* $p = 6n - 1$*.* □

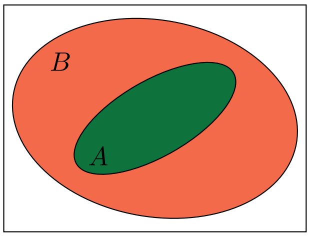

Figura 1: *Se um ponto p pertence a A, necessariamente pertence a B. De modo equivalente, se p não pertence a B, é impossível que pertença a A.*

Demonstração:
O caso $p = 5$ é imediato, então vamos assumir $p > 6$. Seja m o resultado da divisão inteira de p por 6 e r o resto desta divisão. Assim, escrevemos

$$p = 6m + r, \tag{2.9}$$

com $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Como $6m$ é divisível por 2 e por 3 e p é primo, r não pode ser nulo nem divisível nem por 2 nem por 3. Assim, é preciso que $r \in \{1, 5\}$, o que prova a tese. ■

Note que desta vez não chegamos a um absurdo: assumimos que p é primo e disso derivamos a tese. Em qualquer demonstração, queremos provar que dadas certas hipóteses A, segue uma conclusão B: $A \Rightarrow B$. Na prova por absurdo, assumimos que valem A e $\neg B$ e chegamos, eventualmente, a alguma contradição. Na prova direta, assumimos A e caminhamos na direção de B.

2.3 Prova por Contrapositiva

As demonstrações por contrapositiva se aproveitam do fato de que a implicação

$$A \Rightarrow B \tag{2.10}$$

é equivalente a

$$\neg B \Rightarrow \neg A. \tag{2.11}$$

A implicação "$\neg B \Rightarrow \neg A$" é dita ser a *contrapositiva* de $A \Rightarrow B$.

Em palavras, "A implica B" se, e somente se, "não-B implica não-A". Para entender o porquê disso, é útil pensarmos em termos de conjuntos. Considere, por exemplo, os conjuntos ilustrados na Figura 1. Temos que $A \subseteq B$. Assim, se um ponto p pertence a A, ele necessariamente pertence também a B. Como consequência, se p não pertence a B, é impossível que pertença a A. Assim, $A \subseteq B$ implica $B^c \subseteq A^c$. De maneira análoga prova-se a volta. O que ocorre com as implicações lógicas é análogo.

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo:
Um famoso exemplo de silogismo é dado por "Sócrates é homem. Todo homem é mortal. Logo, Sócrates é mortal".

Note que a frase "Todo homem é mortal" diz, em outras palavras, que ser homem implica em ser mortal. Em termos um pouco mais conjuntistas, todo elemento do conjunto de homens é um elemento do conjunto de mortais. Note ainda que, por consequência, se alguém não é mortal, não pode ser homem: se fosse homem, seria mortal, e é impossível que este alguém seja ao mesmo tempo mortal e imortal. ♥

Note que a contrapositiva é "$\neg B \Rightarrow \neg A$", não "$\neg A \Rightarrow \neg B$". Na figura Figura 1 na página precedente há pontos que não estão em A, mas então em B. De modo análogo, há seres mortais que não são homens (por exemplo, galinhas depenadas).

Frequentemente é possível reformular provas por absurdo em como provas por contrapositiva.

Proposição 7:

Todo número primo maior que 3 é vizinho de um múltiplo de 6, ou seja, para todo primo $p > 3$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p = 6n + 1$ ou $p = 6n - 1$. □

Demonstração:

Vamos provar a contrapositiva. A tese diz que "se p é primo, então o resto da divisão de p por 6 é 1 ou 5". Assim, a contra positiva diz "Se o resto da divisão de p por 6 *não* é 1 nem 5, então p *não* é primo".

Assumimos então que o resto da divisão de p por 6 não é 1 nem 5, o que significa que é 0, 2, 3 ou 4. Podemos escrever

$$p = 6m + r, \tag{2.12}$$

onde m é natural e r o resto da divisão de p por 6. Caso r seja nulo, 2 ou 4, então p é múltiplo de 2 e portanto não é primo. Se r é 3, então p é múltiplo de 3 e portanto não é primo. Isto prova a contrapositiva e conclui a demonstração. ■

Note que desta vez para provar que $A \Rightarrow B$ nós assumimos $\neg B$ e caminhamos em direção a $\neg A$. Todos os estilos de demonstração que exibimos são funcionais e um não está mais correto do que o outro. A diferença principal é na conveniência de cada método.

Demonstrações por contrapositiva, por exemplo, tendem a ser convenientes quando a formulação do teorema soa um pouco estranha. O método consiste em reescrever o que se deseja provar de uma maneira distinta, mas equivalente, o que faz com que às vezes o objetivo fique mais claro. Vamos a outro exemplo.

Proposição 9:

Sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Se n não é divisor de ab, então n não é divisor nem de a nem de b. □

Demonstração:

Vamos demonstrar a contrapositiva. Ela diz que "Se n é divisor de a ou de b, então é divisor de ab". De fato, se n é divisor, por exemplo, de a, então existe algum inteiro m tal que $a = nm$. Logo, sabemos que

$$ab = nmb, \tag{2.13}$$

e portanto ab é divisível por n, visto que mb é inteiro. Analogamente se faz a demonstração para o caso em que n é divisor de b, mas não de a. ■

2.4 Indução Finita

A última técnica de demonstração que iremos ilustrar é a indução finita. Ela é um método para demonstrar propriedades que valem para qualquer natural $n \in \mathbb{N}$. A ideia básica é simples: prova-se um caso base (para $n = 0$ ou $n = 1$, tipicamente) e então se prova que se a propriedade vale para n, há de valer para $n+1$, o que se chama de passo indutivo. O passo indutivo é como demonstrar que quando um dominó cai, ele derruba o seguinte, enquanto provar o caso base é como derrubar o primeiro dominó.

Proposição 10:
Seja $n \in \mathbb{N}$. A soma dos n primeiros números naturais é dada por

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{2.14}$$

□

Demonstração:
Começamos provando o caso base: $n = 0$. Neste caso, temos que

$$0 = \frac{0(0+1)}{2}, \tag{2.15}$$

o que é verdade. Assim, está feito o caso base.

Agora, queremos provar que se o resultado vale para n, vale para $n+1$. Ou seja, assumimos que para algum n fixo o resultado é verdadeiro (sabemos, por exemplo, que ele é verdadeiro para $n = 0$) e vamos utilizar isso para provar que também precisa valer para $n+1$. Queremos calcular $1 + \cdots + (n+1)$. Como estamos assumindo que o resultado vale para n, temos que

$$\begin{aligned} 1 + \cdots + (n+1) &= 1 + \cdots + n + (n+1), && (2.16a) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1), && (2.16b) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}, && (2.16c) \end{aligned}$$

que é precisamente o resultado que esperávamos. Assim, do caso $n = 0$ concluímos que vale o caso $n = 1$, do qual concluímos que vale o caso $n = 2$, do qual concluímos que vale o caso $n = 3$, e assim por diante, como dominós se derrubando em sequência. ■

Teorema 11 [Binômio de Newton]**:**
Seja $n \in \mathbb{N}$ e sejam[*] $a, b \in \mathbb{Z}$. *Então a expressão*

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{k-n} b^k && (2.17a) \\ &= a^n + n a^{n-1} b + \cdots + \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{k-n} b^k + \cdots + n a b^{n-1} + b^n && (2.17b) \end{aligned}$$

vale. □

[*] Poderíamos tomar a, b mais gerais, mas isso não é necessário para o nosso propósito.

Demonstração:

Começamos provando o caso base: $n = 0$. Neste caso, a tese diz

$$(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \frac{0!}{k!(0-k)!} a^{0-k} b^k = \frac{0!}{0!0!} a^0 b^0 = 1, \tag{2.18}$$

que é verdade. Logo, o caso $n = 0$ está provado.

Para o passo indutivo, começamos escrevendo*

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n, && (2.19a)\\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{k-n} b^k, && (2.19b)\\
&= a\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k + b\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k, && (2.19c)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^{k+1}, && (2.19d)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n+1-k} b^k + \sum_{l=1}^{n+1} \frac{n!}{(l-1)!(n+1-l)!} a^{n+1-l} b^l, && (2.19e)\\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n+1-k} b^k + \sum_{l=1}^{n} \frac{n!}{(l-1)!(n+1-l)!} a^{n+1-l} b^l + b^{n+1}, && (2.19f)\\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}, && (2.19g)\\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!}\right] a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}, && (2.19h)\\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}, && (2.19i)\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} a^{n+1-k} b^k, && (2.19j)
\end{aligned}$$

o que prova o passo indutivo. ■

*Escrevemos o cálculo utilizando a notação de somatório ($\sum$) por ela ser mais compacta, mas caso sinta dificuldade com ela, tente reproduzir os passos escrevendo as somas com reticências para indicar os termos ausentes.

3 Limite

Para exemplificar algumas das técnicas de demonstrações que introduzimos, vamos utilizar o contexto de limites em Cálculo. Vamos começar relembrando a definição de limite de uma função e seu significado.

3.1 Definição Formal de Limite

Definição 12 [Limite de uma Função]**:**
Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função, onde $I = (p,q) \cup (q,r)$ com $p,q,r \in \mathbb{R}$ (podemos permitir p, r infinitos também). Seja $a \in (p,q)$. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o *limite de* $f(x)$ *quando* x *tende a* a, e escrevemos $\lim_{x\to a} f(x) = L$, se, e somente se,

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \tag{3.1}$$

for verdade. ♠

Antes de mais nada, notamos que poderíamos dar uma definição de limite mais geral, que não se restringe apenas a funções definidas em intervalos. Porém, para não entrarmos em dificuldades técnicas (como a definição de ponto de aderência), vamos nos restringir ao caso mais simples, visto que ele cobre o que nos interessa. Para economizar palavras, introduziremos uma notação que será utilizada no restante do texto.

Notação:
A letra I sempre denotará uma união de intervalos abertos $I \equiv (p,q) \cup (q,r)$, com $q \in \mathbb{R}$ e p e r reais ou infinitos. O intervalo (p,q) será denotado por $\overline{I} \equiv (p,q)$. ♦

A Definição 12 é particularmente técnica e difícil de interpretar quando não se está acostumado com ela. Assim, vamos começar discutindo o seu significado.

Nos são dadas a princípio três coisas: uma função $f(x)$, um ponto a e um valor L. Então nos perguntamos: L é o limite de $f(x)$ quando x tende a a? Isso será verdade se a Eq. (3.1) for verdade, e falso se a Eq. (3.1) for falsa. Porém, o que significa a Eq. (3.1)?

A expressão começa com "$\forall\, \epsilon > 0$", que é lido como "Para todo ϵ maior que 0". A seguir, é dito que "$\exists\, \delta > 0$": "existe δ maior que 0". O ponto e vírgula é lido como "tal que". Por fim, "$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$" diz "se a distância de x a a ($|x-a|$) for não-nula e menor que δ, então a distância de $f(x)$ a L ($|f(x) - L|$) é menor ϵ". A expressão completa é então "Para todo ϵ maior que zero, existe um δ maior que zero tal que se a distância de x a a for não-nula e menor que δ, então a distância de $f(x)$ a L será menor que ϵ".

O que a frase nos diz então é que queremos que seja possível tornar $f(x)$ tão perto quando quisermos de L (queremos fazer sempre a distância de $f(x)$ a L menor que ϵ, para qualquer ϵ previamente dado), sob o preço de tornar x suficientemente próximo de a (devemos encontrar algum δ tal que a distância de x a a ser menor que δ implica na distância de $f(x)$ a L ser menor que ϵ). A imposição de que $0 < |x-a|$ serve ao propósito de que estamos interessados no comportamento de $f(x)$ para x próximo a a, mas não necessariamente em a (na verdade, f pode nem estar definida em a).

Dadas $f(x)$ e a, não é para todo valor de L que isso é possível. Na verdade, há no máximo um valor de L para o qual isso é possível. Vamos a alguns exemplos.

Exemplo:

Consideremos a função $f(x) = 2x$. O limite de $f(x)$ quando x tende a $a = 1$ é 3?

Caso seja, então podemos fazer $2x$ ficar arbitrariamente próximo de 3 ao fazer x ficar suficientemente próximo de 1. Contudo, se não for possível, a afirmação da Eq. (3.1) na página anterior é falsa, ou seja, existe algum $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, é possível ter $0 < |x - a| < \delta$ e mesmo assim $|f(x) - L| \geq \epsilon$. Ou seja, só é possível aproximar $f(x)$ de L até um certo ponto ao aproximar x de a.

No caso, $\lim_{x\to 1} 2x \neq 3$. Tome $\epsilon = \frac{1}{2}$. Queremos então ter $|2x - 3| < \frac{1}{2}$. Isso implica que

$$-\frac{1}{2} < 2x - 3 < \frac{1}{2}, \tag{3.2}$$

de onde segue que

$$\frac{5}{4} < x < \frac{7}{4}. \tag{3.3}$$

Ou seja, se quisermos ter $2x$ a uma distância de 3 menor que $\frac{1}{2}$, é preciso que $\frac{5}{4} < x < \frac{7}{4}$, o que significa que trazer x mais para perto de 1 não aproxima $f(x)$ de L.

De maneira mais próxima do que a Eq. (3.1) na página precedente diz, note que para $\epsilon = \frac{1}{2}$ e δ qualquer, é sempre possível achar algum x com $0 < |x - 1| < \delta$, mas $|2x - 3| \geq \frac{1}{2}$: basta tomar $x = 1.01$, por exemplo. ♥

Exemplo:

Consideremos a função $f(x) = 2x$. O limite de $f(x)$ quando x tende a $a = 1$ é 2?

Se for verdade, então para todo $\epsilon > 0$, será possível encontrar $\delta > 0$ tal que aproximar x de 1 com "precisão" suficiente δ implicará aproximar $f(x)$ de 2 com precisão arbitrária ϵ.

Comecemos então vendo o que é preciso para que $|2x - 2| < \epsilon$, para $\epsilon > 0$ arbitrário. Vemos que

$$-\epsilon < 2x - 2 < \epsilon, \tag{3.4a}$$
$$-\frac{\epsilon}{2} < x - 1 < \frac{\epsilon}{2}, \tag{3.4b}$$
$$|x - 1| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.4c}$$

Assim, se $|f(x) - L| < \epsilon$, é *necessário*, mas talvez não *suficiente*, que $|x - 1| < \frac{\epsilon}{2}$. Em outras palavras, sempre que $|f(x) - L| < \epsilon$ é verdade, $|x - 1| < \frac{\epsilon}{2}$ é também verdade. Porém, ainda não sabemos se há vezes em que $|x - 1| < \frac{\epsilon}{2}$ é verdade, mas $|f(x) - L| < \epsilon$ não.

Comecemos então a partir de $|x - 1| < \delta$, com $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Temos que

$$|x - 1| < \frac{\epsilon}{2}, \tag{3.5a}$$
$$-\frac{\epsilon}{2} < x - 1 < \frac{\epsilon}{2}, \tag{3.5b}$$

$$-\epsilon < 2x - 2 < \epsilon, \tag{3.5c}$$
$$|2x - 2| < \epsilon. \tag{3.5d}$$

Logo, de fato a validade de $|x-1| < \frac{\epsilon}{2}$ é suficiente para que $|f(x) - L| < \epsilon$ valha*.

Vemos então que para todo $\epsilon > 0$, $|x-1| < \frac{\epsilon}{2}$ implica que $|2x-2| < \epsilon$. Logo, de fato 2 é o limite de $2x$ quando x tende a 1. ♥

Estes exemplos podem fazer parecer que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ sempre. Isto não é o caso.

Exemplo:

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \neq 1, \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases} \tag{3.6}$$

Seguindo as análises dos exemplos anteriores, pode-se mostrar (faça!) que $\lim_{x\to 1} 2x = 2 \neq 1 = f(1)$. ♥

Isto parece tornar tudo consideravelmente complicado. Conseguimos encontrar os limites nos casos que vimos até agora, mas como poderíamos encontrar os limites para uma função como

$$f(x) = x^7 - x^6 + \frac{x^4+1}{x^3-1} + \log(\sin(137x^{\pi})) \tag{3.7}$$

para $x \to \pi^{\sqrt{2}}$?

Para simplificar nossa vida, provaremos uma série de teoremas nos dando as propriedades básicas dos limites. Com estes resultados, poderemos eventualmente transformar o cálculo de limites em algo operacional, que não exige um contato tão próximo com a definição formal.

3.2 Funções Contínuas e Unicidade do Limite

Vamos começar considerando o caso da função $2x$. Para ela, nos parece que $\lim_{x\to a} 2x = 2a$. Será isso verdade?

Vamos começar com uma situação mais simples: a função $f(x) = x$. Temos a sensação de que $\lim_{x\to a} x = a$. Será isso verdade?

Proposição 13:

Seja $a \in \mathbb{R}$. Vale que $\lim_{x\to a} x = a$. □

Demonstração:

Queremos provar que

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |x-a| < \epsilon. \tag{3.8}$$

*Embora este caso possa parecer um pouco trivial, existem situações mais complicas em que provar a suficiência do resultado não é tão parecido quando provar sua necessidade.

Oras, seja lá qual for ϵ, se $0 < |x - a| < \epsilon$, então é claro que $|x - a| < \epsilon$. Assim,

$$\forall \epsilon > 0, 0 < |x - a| < \epsilon \Rightarrow |x - a| < \epsilon, \tag{3.9}$$

o que prova que, de fato, $\lim_{x \to a} x = a$. ■

Começamos bem. Agora sabemos que $\lim_{x \to a} x = a$, seja lá qual for $a \in \mathbb{R}$. Ainda não sabemos calcular limites de nenhuma outra função, mas ao menos sabemos os limites de $f(x) = x$ em qualquer ponto, visto que para ela sempre temos $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Funções dessa forma parecem particularmente interessantes para o cálculo de limites, então as denominaremos por um nome especial.

Definição 14 [Função Contínua]**:**
Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Se $a \in I$ e $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, dizemos que f é *contínua* em a. Se f é contínua para todos os pontos de seu domínio, dizemos simplesmente que f é contínua. ♠

Assim, o que provamos na Proposição 13 na página anterior é que a função $f(x) = x$ é uma função contínua. Se encontrarmos mais funções contínuas, será mais fácil calcular limites: sempre que chegarmos a uma função contínua, poderemos apenas avaliar a função em um ponto e saberemos o limite. Contudo, e se houver mais de um limite? É possível que exista mais de um L satisfazendo a Eq. (3.1) na página 13? Na reta real*, não.

Teorema 15 [Unicidade do Limite]**:**
Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in \overline{I}$. Se o limite de $f(x)$ conforme x tende a a existe, ele é único. □

Demonstração:
Suponha que $L, M \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \tag{3.10}$$

e

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - M| < \epsilon \tag{3.11}$$

valham. Queremos provar que é preciso que $L = M$. Por absurdo, vamos assumir que $L \neq M$ e, sem perda de generalidade†, vamos assumir que $M > L$. Queremos que $f(x)$ esteja a uma distância menor que ϵ tanto de M quanto de L. Como ϵ é arbitrário, vamos tomar $\epsilon = \frac{M-L}{3}$ (como $\epsilon > 0$, não poderíamos fazer isso para $M = L$). Da hipótese de que L e M são limites de $f(x)$ para $x \to a$, temos que existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica que

$$|f(x) - L| < \frac{M - L}{3} \quad \text{e} \quad |f(x) - M| < \frac{M - L}{3}. \tag{3.12}$$

Da desigualdade triangular, segue então que

$$M - L = |M - L|, \tag{3.13a}$$

*Na área de estudo da Topologia pode-se encontrar exemplos de limites com mais de um valor.
†Se $M < L$, basta repetir a mesma demonstração trocando as letras M e L de lugar.

$$
\begin{aligned}
&= |M - f(x) + f(x) - L|, && (3.13b)\\
&\leq |M - f(x)| + |f(x) - L|, && (3.13c)\\
&= |f(x) - M| + |f(x) - L|, && (3.13d)\\
&< \frac{2}{3}(M - L), && (3.13e)
\end{aligned}
$$

onde também usamos a Eq. (3.12) na página anterior. Deste cálculo, concluímos que $1 < \frac{2}{3}$, o que é absurdo. Assim, a hipótese inicial de que $M \neq L$ é falsa, concluindo a demonstração. ■

Este último resultado justifica que escrevamos $\lim_{x\to a} f(x) = L$: a expressão realmente define (no máximo) um único número. Note ainda que o teorema prova apenas unicidade, mas não garante que o limite sempre existirá.

3.3 Limite da Soma

Porém, originalmente queríamos conhecer o limite de $2x$, não de x. Como podemos calculá-lo?

Perceba que $2x = x + x$. Existem certamente várias funções que podem ser escritas na forma $h(x) = f(x) + g(x)$. Será que podemos calcular o limite de $h(x)$ ao calcular o limite de $f(x)$ e de $g(x)$? Isso facilitaria nossos cálculos, pois a partir dos nossos resultados para algumas funções conseguiríamos resultados para ainda mais funções.

Teorema 16:

Sejam $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ funções. Dado $a \in \overline{I}$, suponha que existam $L, M \in \mathbb{R}$ tais que

$$
\lim_{x\to a} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x) = M. \tag{3.14}
$$

Então o limite de $h(x) = f(x)+g(x)$ quando x tende a a existe e é dado por $\lim_{x\to a} h(x) = L+M$. Em outras palavras, o limite da soma é a soma dos limites quando estes existem. □

Demonstração:

Por hipótese, sabemos que $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$
0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon, \tag{3.15}
$$

$$
0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon. \tag{3.16}
$$

Seja $\epsilon > 0$ qualquer. Tome $\varepsilon = \frac{\epsilon}{2}$ e denote $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, com δ_1 e δ_2 sendo como anteriormente. Então note que

$$
0 < |x - a| < \delta < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}, \tag{3.17}
$$

$$
0 < |x - a| < \delta < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.18}
$$

Assim, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica em

$$
-\frac{\epsilon}{2} < f(x) - L < \frac{\epsilon}{2}, \tag{3.19}
$$

$$
-\frac{\epsilon}{2} < g(x) - M < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.20}
$$

Somando os dois termos, temos que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica em

$$-\epsilon < f(x) + g(x) - L - M < \epsilon. \tag{3.21}$$

Ou seja, provamos que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - L - M| < \epsilon, \tag{3.22}$$

que significa que

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M, \tag{3.23}$$

provando a tese. ■

Corolário 17:

Sejam $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ funções contínuas em um ponto $a \in I$. Então a função $h(x) = f(x) + g(x)$ é contínua em a. □

Demonstração:

Basta notarmos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} h(x) &= \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)], && (3.24a) \\ &= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x), && (3.24b) \\ &= f(a) + g(a), && (3.24c) \\ &= h(a), && (3.24d) \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. Note que o segundo e o terceiro passo utilizam a hipótese de que as funções são contínuas: o segundo passo precisa que os limites de $f(x)$ e $g(x)$ para $x \to a$ estejam bem-definidos para poder aplicar o Teorema 16 na página precedente; o terceiro passo usa a continuidade para poder avaliar os limites. ■

Com estes resultados, vemos que de fato conhecemos os limites de $2x$ com $x \to a$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$: como $2x = x + x$ e sabemos que $f(x)$ é contínua, segue do Corolário 17 que $2x$ é contínua também.

3.4 Limite do Produto

Este resultado ainda é um tanto restritivo. Será que podemos obter conclusões mais poderosas? Consideremos, por exemplo, o limite do produto de duas funções. Podemos obter um resultado semelhante ao Teorema 16 na página precedente?

Na verdade, podemos, mas antes disso é útil termos alguns resultados auxiliares, que deixaremos como exercícios.

Exercício 3.1:

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Considere a função $f\colon I \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \lambda$. Mostre que f é contínua. Note que isto significa que toda função constante é contínua. ✠

Exercício 3.2:

Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função. Mostre que a função $g(x) = \lambda f(x)$ é contínua. Note que isto significa que o produto de uma função contínua por uma função constante é uma função contínua. ✠

Proposição 18:

Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função. Assuma que o limite de $f(x)$ conforme x tende a $a \in \overline{I}$ existe. Então

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \tag{3.25}$$

se, e somente se,

$$\lim_{x\to a}[f(x) - L] = 0. \tag{3.26}$$

□

Demonstração:

Suponha que $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Defina $h(x) = f(x) - L$. Utilizando o Teorema 16 e Exercício 3.1 na página 17 e na página precedente sabemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} h(x) &= \lim_{x\to a} f(x) - L, && (3.27a)\\ &= L - L, && (3.27b)\\ &= 0. && (3.27c) \end{aligned}$$

Isto prova o "somente se". Resta provarmos o "se". Suponha que $\lim_{x\to a}[f(x) - L] = 0$. Então pelo Teorema 16 e Exercício 3.1 na página 17 e na página precedente temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}[f(x) - L + L], && (3.28a)\\ &= \lim_{x\to a}[f(x) - L] + \lim_{x\to a} L, && (3.28b)\\ &= L, && (3.28c) \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Com estes resultados, podemos provar o teorema a seguir.

Teorema 19:

Sejam $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ funções. Dado $a \in \overline{I}$, suponha que existam $L, M \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x) = M. \tag{3.29}$$

Então o limite de $h(x) = f(x)\cdot g(x)$ quando x tende a a existe e é dado por $\lim_{x\to a} h(x) = L\cdot M$. Em outras palavras, o limite do produto é o produto dos limites quando estes existem. □

Demonstração:

Tal qual anteriormente, começamos notando que, por hipótese, sabemos que $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon, \tag{3.30}$$

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon. \tag{3.31}$$

Seja $\epsilon > 0$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, podemos tomar $\varepsilon = \sqrt{\epsilon}$. Se seguirmos o mesmo argumento da demonstração do Teorema 16 na página 17, vemos que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica em

$$|f(x) - L| < \sqrt{\epsilon}, \tag{3.32}$$
$$|g(x) - M| < \sqrt{\epsilon}. \tag{3.33}$$

Ao multiplicar as duas expressões, tem-se que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$ implica em

$$|f(x) - L||g(x) - M| < \epsilon, \tag{3.34a}$$
$$|(f(x) - L)(g(x) - M)| < \epsilon, \tag{3.34b}$$
$$|(f(x) - L)(g(x) - M) - 0| < \epsilon, \tag{3.34c}$$

o que significa que

$$\lim_{x \to a} [(f(x) - L)(g(x) - M)] = 0. \tag{3.35}$$

A princípio, podemos pensar em expandir as expressões para vemos que

$$\lim_{x \to a} [f(x)g(x) - f(x)M - Lg(x) + LM] = 0. \tag{3.36}$$

Mas cuidado! Não podemos utilizar o Teorema 16 na página 17 ainda, pois não sabemos se $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$ existe. Porém, podemos escrever

$$f(x)g(x) = (f(x) - L)(g(x) - M) + f(x)M + Lg(x) - LM. \tag{3.37}$$

Dos Exercícios 3.1 e 3.2 na página 18 e na página precedente, sabemos que

$$\lim_{x \to a} f(x)M = LM, \quad \lim_{x \to a} L(gx) = LM, \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} LM = LM. \tag{3.38}$$

Como já conhecemos a Eq. (3.35), agora sim podemos usar o Teorema 16 na página 17 repetidamente para obter

$$\lim_{x \to a} [(f(x) - L)(g(x) - M) + f(x)M + Lg(x) - LM] = 0 + LM - LM + LM = LM. \tag{3.39}$$

Assim, esta expressão e a Eq. (3.37) nos permitem concluir enfim que

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = LM, \tag{3.40}$$

como queríamos demonstrar. ■

O cuidado que tivemos para não assumir que $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$ pode parecer bobo, mas não se esqueça do exemplo que vimos na Seção 1: assumir ingenuamente que um resultado existe pode nos levar a resultados absurdos.

Note que na demonstração do Teorema 19 na página precedente nós "usamos o Teorema 16 na página 17 repetidamente" para lidar com o limite de uma soma de quatro termos. Por segurança, vamos mostrar que isso realmennte é um procedimento válido. Podemos fazer isso utilizando uma demonstração por indução.

3.5 Limite da Soma ou do Produto de Várias Funções

Teorema 20:

Seja $n \in \mathbb{N}$. Para i inteiro com $1 \leq i \leq n$, sejam $f_i\colon I \to \mathbb{R}$ funções. Dado $a \in \overline{I}$, suponha que existam $L_i \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{x\to a} f_i(x) = L_i \tag{3.41}$$

para cada $1 \leq i \leq n$. Nestas condições, o limite de $g(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$ quando x tende a a existe e é dado por $\lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$. Em outras palavras, o limite da soma de n termos é a soma de n termos dos limites quando estes existem. □

Demonstração:

Faremos a prova por indução. O caso base é o Teorema 16 na página 17, que vale para $n = 2$ ($n < 2$ são casos imediatos ou mal-definidos).

Para o passo indutivo, assumimos que o resultado é verdade para n. Queremos provar que vale para $n + 1$. Defina

$$h(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x). \tag{3.42}$$

Note que, pela hipótese indutiva,

$$\lim_{x\to a} h(x) = L_1 + \cdots + L_n. \tag{3.43}$$

Assim, do Teorema 16 na página 17 vemos que

$$\lim_{x\to a} [h(x) + f_{n+1}(x)] = L_1 + \cdots + L_n + L_{n+1}. \tag{3.44}$$

Contudo, pela definição de h, esta expressão diz apenas que

$$\lim_{x\to a} [f_1(x) + \cdots + f_n(x) + f_{n+1}(x)] = L_1 + \cdots + L_n + L_{n+1}, \tag{3.45}$$

o que prova o passo indutivo. Assim, está concluída a demonstração. ■

Note que, nesta demonstração, utilizamos o caso base para provar o passo indutivo. Em algumas demonstrações, é preciso ir além e assumir como hipótese indutiva que a tese vale para todo $k \leq n$, o que é uma técnica conhecida como indução forte. A ideia básica por trás dos dois métodos é idêntica.

Utilizando o mesmo método que usamos para provar o Teorema 20, pode-se obter um resultado análogo para produtos.

Teorema 21:

Seja $n \in \mathbb{N}$. Para i inteiro com $1 \leq i \leq n$, sejam $f_i\colon I \to \mathbb{R}$ funções. Dado $a \in \overline{I}$, suponha que existam $L_i \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{x\to a} f_i(x) = L_i \tag{3.46}$$

para cada $1 \leq i \leq n$. Nestas condições, o limite de $g(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) + \cdots f_n(x)$ quando x tende a a existe e é dado por $\lim_{x\to a} g(x) = L_1 \cdot L_2 \cdot \cdots \cdot L_n$. Em outras palavras, o limite do produto de n fatores é o produto de n fatores dos limites quando estes existem. □

Demonstração:

Veja o Exercício 3.3. ■

Exercício 3.3:

Demonstre o Teorema 21 na página precedente. ✠

3.6 Polinômios

Utilizando os resultados que obtivemos até agora, podemos lidar com os limites de quaisquer polinômios.

Teorema 22:

Seja $P(x)$ um polinômio com coeficientes reais de grau $n \in \mathbb{N}$. $P(x)$ é contínuo. □

Demonstração:

Um polinômio de grau n é da forma

$$P(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n, \tag{3.47}$$

onde os a_i são constantes reais.

De Teorema 21 e Proposição 13 na página 15 e na página precedente podemos concluir que x^k é contínua para qualquer k natural. Juntando isto ao Exercício 3.2 na página 19 vemos que $a_k x^k$ é sempre contínuo. Juntando isto ao Teorema 20 na página precedente concluímos que $a_0 x^0 + \cdots + a_n x^n$ é contínuo, ou seja, que $P(x)$ é contínuo. ■

Isto nos permite calcular de maneira simples uma grande gama de limites. Sempre que encontrarmos um polinômio, saberemos que basta avaliar seu valor no ponto de interesse. Porém, e se a função não for um polinômio, mas algo mais complexo?

3.7 Simplificando Limites

Considere o limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}. \tag{3.48}$$

Como podemos calculá-lo?

Após lidar tando com polinômios, nosso instituto pode nos levar a tentar substituir $x = 1$ e tratar o limite como se fosse de uma função contínua, mas isto nos leva a uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$. Isso não é surpreendente: a função sequer está definida em $x = 1$, o que significa que ela certamente não pode ser contínua ali. Porém, percebemos que para $x \neq 1$ temos

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1, \tag{3.49}$$

e o lado direito desta expressão é contínuo em $x = 1$, o que significa que poderíamos calcular o seu limite para $x \to 1$.

Definimos limites de modo que o que importa para calculá-los é o comportamento da função nas proximidades do ponto onde tomamos o limite, mas não no ponto em si. Por conta da simplificação algébrica que conseguimos para $x \neq 1$, podemos conjecturar que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 1} x+1. \tag{3.50}$$

Vamos transformar esse chute em um teorema.

Teorema 23:

Sejam $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ funções. Seja $a \in \overline{I}$. Suponha que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$ com $x \neq a$. Então $\lim_{x\to a} f(x)$ existe se, e somente se, $\lim_{x\to a} g(x)$ existir e, caso existam, vale que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x). \tag{3.51}$$

□

Demonstração:

Note que o teorema é simétrico em f e g: se provarmos que a existência de $\lim_{x\to a} f(x)$ implica a existência de $\lim_{x\to a} g(x)$, a volta pode ser provada bastando trocar as letras f e g.

Suponha que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe e é dado por $L \in \mathbb{R}$. Neste caso, sabemos que

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \tag{3.52}$$

Note que a imposição que fizemos de que $0 < |x-a|$ significa que em todos os pontos que estamos considerando vale que $f(x) = g(x)$. Assim,

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - L| = |f(x) - L| < \epsilon, \tag{3.53}$$

de onde segue que $\lim_{x\to a} g(x) = L$. ■

Logo, a nossa conjectura é legítima: se pudermos manipular a expressão que aparece dentro do limite na região $x \neq a$ para obter uma função contínua em a, os limites da função original e da função contínua coincidirão. Isso justifica o procedimento que geralmente utilizamos para calcular limites.

3.8 O Que Mais?

Vemos assim a estrutura padrão de como lidar com limites: começamos com a Definição 12 na página 13, que declara qual é o significado de um limite. Ela é particularmente inconveniente para descobrirmos qual é o limite de uma dada função $f(x)$ quando x tende a algum ponto a. Porém, podemos a utilizar para demonstrar uma série de teoremas que começam a nos ensinar as propriedades do símbolo $\lim_{x\to a}$. Conforme aprendemos a manipulá-lo, somos capazes de fazer cálculos com mais simplicidade do que no começo.

No fundo, o símbolo $\lim_{x\to a}$ apenas fornece uma notação mais conveniente que a Eq. (3.1) na página 13. As duas expressões dizem a mesma coisa, mas em diferentes situações elas ressaltam um ou outro aspecto de interesse. Como é dito em Toffoli 2016,

> É bem sabido que o exercício da lógica nunca adiciona ao nosso conhecimento: seu papel é fazer com que um certo aspecto daquele conhecimento fique mais claro ou explícito, enquanto convenientemente mantém todo o resto fora de vista.

A diferença entre a noção operacional e a definição formal de limite é análoga: são a mesma coisa, mas a noção operacional nos permite pensar mais claramente em como executar as contas, enquanto a definição formal nos permite aproveitar melhor os detalhes técnicos e provar novos resultados. Utilizando a definição formal, damos forma à noção operacional para que possamos eventualmente ocultar a definição formal enquanto fazemos os cálculos.

Assim, uma continuação natural para estas notas seria seguir provando propriedades de limites. Há alguma propriedade interessante de limites de funções compostas? Quais outras funções, além dos polinômios, são contínuas? Podemos mudar a variável que estamos utilizando para calcular o limite? E assim por diante.

4 Como Aprender a Demonstrar?

Acredito que é proveitoso adicionar a esse texto alguns comentários mais gerais sobre o processo de aprender a fazer demonstrações, visto que apenas exemplificar métodos de demonstração é certamente insuficiente para que alguém aprenda realmente a lidar com Matemática.

Tal qual para qualquer outro assunto em Física ou Matemática, o único método de aprendizado que eu conheço é a prática. Eu certamente só aprendi a lidar com demonstrações por meio de vários exercícios e teoremas. Com o tempo e experiência, formei um pequeno arsenal de técnicas e ao ver um teorema que preciso demonstrar começo a listar por onde posso tentar. No meu caso pessoal, é razoavelmente frequente que ao pensar "Okay, queremos provar que A vale" minha cabeça imediatamente complete com "Suponha que não!" e comece a buscar uma prova por absurdo (provavelmente meu estilo favorito de demonstração, o que explica a falta de exemplos de demonstração por contrapositiva neste texto). Em outros casos, o caminho por prova direta já está limpo e eu olho ele primeiro.

Naturalmente, também há diversos teoremas que eu olho e não faço ideia de por onde começar, especialmente se estou estudando uma área com a qual estou pouco acostumado. Dentro de cada área da Matemática, há diferentes "truques" que entram para o seu arsenal e vão ajudando nas demonstrações. Por exemplo, em diversas das demonstrações de Cálculo que fizemos nós buscamos chegar em alguma desigualdade particularmente útil. Contudo, as desigualdades não eram tão úteis quando estávamos lidando com exemplos vindos de teoria dos números. Esses detalhes são aprendidos com o tempo e prática.

Por conta desses aspectos, acho que o único jeito de aprender a provar teoremas é provando teoremas. É normal sentir dificuldade no começo e eu certamente passei um tempo batendo a cabeça para entender vários resultados, mas com o tempo essa sensação vai mudando e as ideias que antes pareciam impossíveis começam a surgir mais naturalmente.

O que eu fiz algumas vezes ao longo da minha experiência com Matemática foi começar a tentar demonstrar os resultados de algum curso que eu estava fazendo antes de ver a demonstração dos meus professores. Por um lado, isso demora muito mais do que outros métodos de estudo que eu já experimentei, mas também foi muito mais eficiente. Os assuntos que eu estudei por esse método ficaram muito melhor fixados e eu atingi níveis de compreensão claramente mais profundos, em boa parte porque esse método consiste em essencialmente transformar o curso inteiro em uma grande sequência de exercícios.

Outro método para "gerar exercícios" é modificar os teoremas e definições um pouco e ver se as propriedades continuam iguais ou se algo é perdido. Por exemplo, na Definição 12 na página 13, é importante que se escreva "$0 < |x - a| < \delta$" ou seria "$|x - a| < \delta$" equivalente? O que acontece se relaxarmos a hipótese de que os limites de $f(x)$ e $g(x)$ existem no Teorema 16 na página 17? O limite de $h(x)$ necessariamente não vai existir ou é possível que ainda exista? De modo análogo, podemos tentar modificar as demonstrações. Podemos fazer a demonstração por absurdo do Teorema 15 na página 16 em uma demonstração por contrapositiva, por exemplo? Ainda podemos estabelecer conjecturas sobre resultados futuros e pensar se elas se sustentam ou não. Por exemplo, é verdade que $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$? Se sim, por quê? Se não, qual é um contraexemplo? Podemos adicionar novas hipóteses sobre f ou g para que a expressão valha? E assim por diante.

Referências

Geroch, Robert (1985). *Mathematical Physics*. Chicago Lectures in Physics. Chicago: University of Chicago Press.

Hardy, G. H. (2013). *A Mathematician's Apology*. Em colab. com C. P. Snow. Canto. Cambridge: Cambridge University Press.

Milies, César Polcino e Sônia Pitta Coelho (2006). *Números: Uma Introdução à Matemática*. Acadêmica 20. São Paulo: Edusp.

Tao, Terence (2016). *Analysis I*. 3ª ed. Vol. 37. Texts and Readings in Mathematics. Singapore: Springer. DOI: 10.1007/978-981-10-1789-6.

Toffoli, Tommaso (30 de jun. de 2016). "Entropy? Honest!" Em: *Entropy* **18**.7, p. 247. DOI: 10.3390/e18070247.