



# Mecânica Clássica

---

## Níckolas Alves

*Departamento de Física Matemática,  
Instituto de Física - Universidade de São Paulo,  
R. do Matão 1371,  
Cidade Universitária, São Paulo, Brasil*

*E-mail:* [alves.nickolas@alumni.usp.br](mailto:alves.nickolas@alumni.usp.br)

RESUMO: Estas são as notas de aula para um minicurso ministrado virtualmente aos estudantes de graduação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo durante as férias de inverno do ano de 2020. Elas são uma introdução às formulações Lagrangeana e Hamiltoniana da Mecânica Clássica e incluem uma breve introdução à equação de Hamilton-Jacobi.

PALAVRAS-CHAVE: Mecânica Clássica, Mecânica Lagrangeana, Mecânica Hamiltoniana, Teoria de Hamilton-Jacobi

## Introdução

Estas são as notas de aula para um minicurso ministrado virtualmente aos estudantes de graduação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo durante as férias de inverno do ano de 2020. Elas são uma introdução às formulações Lagrangeana e Hamiltoniana da Mecânica Clássica e incluem uma breve introdução à equação de Hamilton-Jacobi.

O texto assume conhecimento de Mecânica Newtoniana básica e familiaridade, técnicas do Cálculo Diferencial e Integral em uma variável e um pouco sobre Cálculo Diferencial de várias variáveis. Em diversos pontos serão utilizados conceitos matemáticos mais avançados que estes, mas que – caso eu tenha sido bem sucedido na redação – estão explicados de maneira suficientemente bem para a sua aplicação em Física.

Apesar do nome “Mecânica Clássica”, a intenção do curso é que seja um curso de Física Teórica como um todo, utilizando a Mecânica como meio, e não fim. Por isso, em diversos pontos são mencionadas aplicações dos resultados a outras áreas, comparações com resultados de outras áreas, introduzidos conceitos de disciplinas que espera-se que os alunos não tenham estudado, e assim por diante.

Por exemplo, os requisitos assumidos não incluem familiaridade com o Teorema de Gauss. O fato do Teorema de Gauss ocorrer no decorrer do texto não é meramente acidental, mas sim uma forma de antecipar aquilo que os estudantes encontrarão em breve em sua formação. Sendo este um curso de inverno, acredito que facilitar o estudo das disciplinas formais que estão por vir é algo positivo a ser feito.

A mesma visão de preparar o estudante para o que está por vir motiva a apresentação de temas pouco usuais em cursos introdutórios de Mecânica (ao menos para os padrões do IFUSP), como o grupo de Galilei, o Teorema de Noether e a noção de teoria efetiva. Estes assuntos permitem desde já uma compreensão mais profunda acerca da Mecânica Clássica e permitem que o estudante passe a perceber o papel central que as noções de simetria e teoria efetiva possuem na Física contemporânea.

Por fim, o texto está recheado de exercícios, e existem alguns exercícios extras separados ao final de cada seção, além de uma coletânea final no Apêndice C. Alguns são estrelados, embora não me lembre qual era a convenção inicial que tinha sobre as estrelas. Eram estes os exercícios importantes ou os desafiadores? Sendo os desafiadores certamente importantes, decidi que as estrelas denotariam os importantes. Recomendo fortemente que o leitor faça tantos dos exercícios quanto possível. Cito, tal qual [38], um trecho do poema *Cantares*, de Antonio Machado:

Caminhante, são tuas pegadas  
o caminho e nada mais;  
caminhante, não há caminho,  
se faz caminho ao andar.

Aproveito, para deixar o devido reconhecimento àqueles que o merecem. O presente texto tem pouco, ou talvez nada, de material realmente original. As principais fontes do texto foram [26, 27, 29, 47, 50], e uma lista mais completa está disponível na Bibliografia.

Deixo ainda meus agradecimentos a todas as pessoas que me auxiliaram e incentivaram na confecção deste texto. Diversos colegas demonstraram entusiasmo com o curso e contribuíram com sugestões de assuntos a serem cobertos (às vezes depois de eu ter perguntado explicitamente “Quais áreas da Física te interessam?”), correções de diversos tipos, e assim por diante. Em especial, deixo meu agradecimento a meu amigo Pedro Henrique Trajano Lemos Tredezini não só por ter me apoiado ao longo da escrita destas notas, mas também por as ter lido e apontado problemas, dado sugestões de melhorias e me auxiliado a resolver as dúvidas e complicações bizarras que surgiram ao longo do processo. Espero poder retribuir o favor em breve.

Finalmente, comentários, dúvidas, críticas e sugestões são muito bem vindas, e podem ser enviadas para [alves.nickolas@alumni.usp.br](mailto:alves.nickolas@alumni.usp.br).

---

## Sumário

<b>1</b>	<b>Mecânica Lagrangeana</b>	<b>1</b>
1.1	Coordenadas Generalizadas	1
1.2	O Princípio de Hamilton	3
1.3	O Grupo de Galilei	6
1.4	Sistemas Fechados	12
1.5	Teorias Efetivas	15
1.6	Potenciais Dependentes do Tempo	20
1.7	Leis de Conservação	22
1.A	Exercícios Complementares	31
<b>2</b>	<b>Mecânica Hamiltoniana</b>	<b>36</b>
2.1	Equações Canônicas	36
2.2	Espaço de Fases	39
2.2.1	Unidades Naturais	42
2.2.2	Extinção de Línguas	46
2.3	Teorema do Virial	50
2.3.1	Gases Ideais	53
2.4	Colchetes de Poisson	55
2.4.1	Oscilador Harmônico Simples e Colchetes de Poisson	57
2.4.2	Série de Lie	60
2.5	Transformações Canônicas	61
2.5.1	Transformações Canônicas Infinitesimais	66
2.5.2	Leis de Conservação no Formalismo Hamiltoniano	71
2.5.3	Colchetes de Lagrange e Funções Geratrizes	72
2.5.4	Oscilador Harmônico Simples e Transformações Canônicas	76
2.5.5	Método de Euler-Cromer	78
2.A	Exercícios Complementares	82
<b>3</b>	<b>Teoria de Hamilton-Jacobi</b>	<b>87</b>
3.1	Equação de Hamilton-Jacobi	87
3.2	Separação de Variáveis	89
3.3	Variáveis de Ação-Ângulo	96
	<b>Introdução</b>	<b>102</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>103</b>
<b>A</b>	<b>O Oscilador Harmônico Simples</b>	<b>106</b>
A.1	A Equação do Oscilador Harmônico Simples	106
A.2	Números Complexos	109

<b>B</b>	<b>Códigos em Python</b>	<b>112</b>
B.1	Solução Numérica do Oscilador Harmônico Simples	112
B.2	Espaço de Fases do Pêndulo Simples	114
B.3	Espaço de Fases do OHS – Método de Euler	116
B.4	Espaço de Fases do OHS – Método de Euler–Cromer	118
<b>C</b>	<b>Exercícios Finais</b>	<b>120</b>

---

## 1 Mecânica Lagrangeana

### 1.1 Coordenadas Generalizadas

Uma grande variedade de sistemas físicos pode ser descrito por um conjunto finito de funções do tempo  $(q_1(t), \dots, q_n(t))$ , que cumprem o papel de coordenadas do sistema. O movimento de um projétil sob a ação de um campo gravitacional constante pode ser descrito em termos de coordenadas cartesianas  $(x(t), y(t), z(t))$ ; o movimento de um planeta em torno de uma estrela pode ser descrito em termos de coordenadas polares  $(r(t), \phi(t))$ ; o movimento de um pêndulo em três dimensões pode ser descrito em termos de coordenadas esféricas  $(r(t), \phi(t), \theta(t))$ .

De maneira mais geral, ao trabalhar em três dimensões espaciais na ausência de vínculos, podemos descrever as posições de  $N$  partículas pontuais por meio de  $3N$  coordenadas. Neste caso, dizemos que o sistema tem  $3N$  graus de liberdade. Essas coordenadas parametrizam um espaço  $3N$ -dimensional conhecido como espaço de configurações,  $C$ . Cada conjunto de posições  $(q_1, \dots, q_{3N})$  representa uma configuração, *i.e.*, um ponto no espaço de configurações. A evolução temporal das coordenadas  $(q_1, \dots, q_{3N})$  dá origem a curvas  $(q_1(t), \dots, q_{3N}(t))$  no espaço de configurações, que são parametrizadas pelo tempo  $t$ .

Suponhamos que a dinâmica do movimento de  $N$  partículas, possivelmente sob a ação de forças externas, seja descrita por um potencial  $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, t)$ . Então as equações de movimento do sistema são dadas pela Segunda Lei de Newton

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad (1.1)$$

onde  $m_i$  representa a massa da partícula associada à coordenada  $x_i$ . Assumimos aqui que as coordenadas  $x_i$  são as coordenadas cartesianas no espaço tridimensional.

Se o potencial  $V$  é conhecido, então toda a dinâmica do sistema é conhecida e o movimento pode ser determinado ao integrar o sistema de equações determinado pela Eq. (1.1). Contudo, por ser um sistema de  $3N$  equações diferenciais de segundo grau, a solução do sistema é determinada a menos de  $6N$  constantes de integração: duas para cada equação integrada. Por isso, fornecemos condições iniciais  $(\mathbf{r}_1(0), \dots, \mathbf{r}_N(0), \dot{\mathbf{r}}_1(0), \dots, \dot{\mathbf{r}}_N(0))$  para que a solução seja única.

Do ponto de vista do espaço de configurações, isto significa que se é dado um ponto  $(x_1(0), \dots, x_{3N}(0)) \in C$  e velocidades iniciais  $(\dot{x}_1(0), \dots, \dot{x}_{3N}(0))$ , o potencial  $V$  determina as curvas  $(x_1(t), \dots, x_{3N}(t))$  representando a evolução temporal do sistema.

Contudo, nem sempre é preciso lidar com  $3N$  coordenadas. Diversos sistemas podem apresentar vínculos: restrições aos valores que as coordenadas podem assumir que restringem os graus de liberdade do sistema. Por exemplo, um pêndulo esférico tem seu movimento restrito à condição de que  $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$  para algum  $l > 0$ : o comprimento do pêndulo. Em coordenadas esféricas, esta condição se traduz em  $r(t) = l$ , onde  $r$  representa a coordenada radial. Podemos então descrever o movimento do pêndulo em termos apenas das coordenadas angulares  $\phi$  e  $\theta$ .

Note que o vínculo presente no problema do pêndulo esférico tem a forma  $\varphi(q, t) = 0$ , onde  $q = (q_1, \dots, q_{3N})$  é uma notação preguiçosa para a coleção das coordenadas do sistema. Nem todos os vínculos têm essa forma. A condição para que uma partícula se mantenha dentro de uma caixa cúbica de lado  $L$ , por exemplo, é dada em termos das desigualdades

$$\begin{cases} 0 < x < L, \\ 0 < y < L, \\ 0 < z < L. \end{cases}$$

Vínculos que podem ser expressos na forma

$$\varphi(q, t) = 0 \tag{1.2}$$

para alguma escolha de coordenadas  $q$  são ditos holonômicos. Naturalmente, os vínculos que não são holonômicos são ditos não-holonômicos. Outra definição equivalente é que um vínculo é não-holonômico quando pode-se mover o sistema de uma configuração qualquer a outra configuração qualquer sem que o vínculo seja violado. Desta vez, um vínculo holonômico é aquele que não é não-holonômico.

**Exercício 1:**

Refleta sobre a equivalência destas definições. ✖

Vínculos holonômicos simplesmente restringem a região do espaço de configurações que é acessível às partículas: o pêndulo não pode mais explorar regiões do espaço de configurações com  $r > l$  ou  $r < l$ .

Um sistema holonômico é um sistema físico cujos vínculos são todos holonômicos.

**Exercício 2:**

Uma bola que rola sem deslizar sobre uma mesa é um sistema holonômico? ✖

Para um sistema holonômico, é possível obter um conjunto de coordenadas  $q = (q_1, \dots, q_n)$  chamadas coordenadas generalizadas tais que

- i. a configuração do sistema é determinada a qualquer instante sem ambiguidade pelas coordenadas  $q$ ;

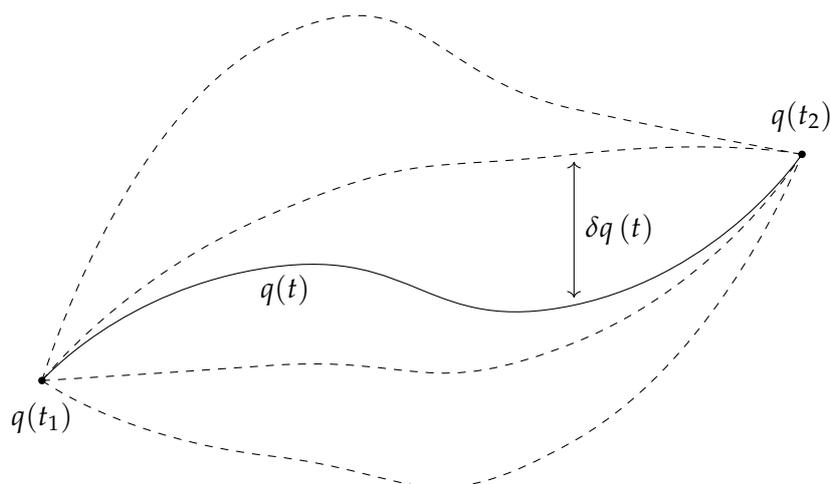
- ii. os vínculos do sistema são satisfeitos identicamente quando expressos em termos das coordenadas  $q$ .

Às derivadas temporais  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$  dá-se o nome de velocidades generalizadas.

Para um sistema de  $N$  partículas sujeito a  $p$  vínculos holonômicos  $\varphi_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, 1 \leq i \leq p$ , apenas  $n = 3N - p$  coordenadas podem ser mutuamente independentes. Portanto, o sistema tem não  $3N$ , mas apenas  $n$  graus de liberdade.

Para um sistema com  $n$  graus de liberdade, a evolução será determinada por  $n$  equações diferenciais de segunda ordem que devem ser suplementadas por informação adicional que em geral vem na forma de  $2n$  condições iniciais. Mas por que deveríamos nos ater a condições iniciais?

Por um ponto de vista puramente matemático, nosso objetivo não diz respeito a prever o futuro de uma partícula a partir de seu estado atual, mas sim resolver  $n$  equações diferenciais de segunda ordem. Isso não demanda  $2n$  condições iniciais, apenas  $2n$  constantes de integração. Ao invés de delimitar a posição inicial e a velocidade inicial de cada partícula, podemos, por exemplo, considerar um problema de fronteira: se no instante  $t_1$  as partículas se encontram na configuração  $q(t_1)$  e no instante  $t_2$  se encontram na configuração  $q(t_2)$ , qual a configuração num instante de tempo arbitrário  $t$ ?



**Figura 1.** Diversas possíveis trajetórias apresentam a configuração  $q(t_1)$  no instante  $t_1$  e a configuração  $q(t_2)$  no instante  $t_2$ . Apenas uma delas é a trajetória real  $q(t)$ , e as demais podem ser escritas na forma  $q(t) + \delta q(t)$ , com  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ .

## 1.2 O Princípio de Hamilton

Há diversos possíveis caminhos que apresentam a configuração  $q(t_1)$  no instante  $t_1$  e a configuração  $q(t_2)$  no instante  $t_2$ . Sabemos\* que apenas um destes pode ser o caminho

\*Sabemos? [34] é uma excelente discussão sobre a fundamentalidade da noção de causalidade, e fornece um exemplo em Mecânica Clássica de um sistema físico com mais de uma possível solução.

real, que denotaremos por  $q(t)$ . Podemos representar as demais trajetórias na forma  $q(t) + \delta q(t)$ , onde  $\delta q(t)$  denota uma variação do caminho real  $q(t)$ . Como todos os caminhos começam e terminam nos mesmos pontos, vale que  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ . Isto é representado na Figura 1.

### Princípio de Hamilton:

Seja um sistema mecânico holonômico descrito por uma função Lagrangeana  $L(q, \dot{q}, t)$ . O movimento real descrito pelo sistema no espaço de configurações é aquele que torna estacionário o valor da ação

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.3)$$

mantendo fixadas as configurações nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ .

É válido mencionar que o Princípio de Hamilton é frequentemente chamado de Princípio de Mínima Ação na literatura. Contudo, a ação não precisa ser minimizada na trajetória real: apenas é necessário que ela seja estacionária, *i.e.*, a variação  $\delta S$  na ação devido a pequenas variações  $\delta q$  na trajetória real  $q(t)$  é de ordem quadrática em  $\delta q$ . Como a ação é um funcional, a noção de “estacionaridade” pode soar um pouco confusa. O análogo para funções reais é a exigência de que  $\frac{df}{dx} = 0$ .

Isto não nos deu muita informação. O que seria uma função Lagrangeana, e o que significa dizer que o sistema é por ela descrito? Ademais, de onde vem este Princípio?

Tal qual o potencial capturava a dinâmica de sistemas mecânicos na formulação Newtoniana, a Lagrangeana descreverá completamente a dinâmica e cinemática dos sistemas mecânicos nesta nova formulação. Por ora, não sabemos como expressar a Lagrangeana de um dado problema físico, mas descobriremos isso em breve.

Tornemos nossa atenção para a motivação para o Princípio de Hamilton. Não a proveremos. Aqui tomaremos o Princípio de Hamilton como um postulado fundamental da teoria, que ao fim do dia será justificado pelo fato de que seremos capazes de recuperar a descrição Newtoniana (de fato, as descrições são completamente equivalentes nos sistemas que descrevem) e por haver compatibilidade com os dados experimentais. Isso não é diferente de postularmos que  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , e em verdade é frequente na Física que se postule leis fundamentais com base na concordância de suas previsões com o que é observado experimentalmente.

Àqueles que insistem que o Princípio de Hamilton deve ser derivado da Mecânica Newtoniana, recomendo a leitura de [29].

Antes de analisarmos qual a forma específica da Lagrangeana, vamos estudar como o Princípio de Hamilton determina o movimento do sistema.

Sabemos que a trajetória real  $q(t)$  é tal que a ação é estacionária, *i.e.*, a variação da ação devida a pequenas alterações  $\delta q(t)$  na trajetória é nula. Em símbolos,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0. \quad (1.4)$$

Notamos que  $\delta\dot{q}_i = \frac{d\delta q_i}{dt}$ , para cada componente  $i$  das coordenadas. Isso não se deve a uma definição, mas sim ao fato que as variações  $\delta q_i(t)$  ocorrem sempre em tempo fixo, como retratado na Figura 1: a trajetória alterada é sempre  $q(t) + \delta q(t)$ , não  $q(t) + \delta q(t')$ .

Como as variações  $\delta q_i$  e  $\delta\dot{q}_i$  são pequenas, podemos escrever

$$L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t) \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) \delta\dot{q}_i(t). \quad (1.5)$$

Assim, a condição de que  $\delta S = 0$  se torna

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t) \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) \delta\dot{q}_i(t) \right] - L(q, \dot{q}, t) dt = 0, \\ \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t) \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) \delta\dot{q}_i(t) dt = 0. \quad (1.6)$$

Podemos integrar o segundo termo por partes e obter que (omitindo, por simplicidade, os argumentos das funções)

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (1.7)$$

Havíamos requerido que as configurações são mantidas fixas nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ . Logo,  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ , o que faz com que o termo fora da integral (chamado de termo de superfície) se anule. Isto nos deixa com

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0. \quad (1.8)$$

A Eq. (1.8) há de valer para quaisquer dois instantes  $t_1$  e  $t_2$  e para variações arbitrárias (embora pequenas)  $\delta q$ . Logo, é preciso que valha que

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0. \quad (1.9)$$

As equações na Eq. (1.9) são conhecidas como Equações de Euler-Lagrange. Dada uma Lagrangeana, elas fornecerão as equações de movimento do sistema físico.

Mesmo antes de conhecermos a Lagrangeana de qualquer sistema físico, já podemos obter algumas conclusões sobre suas propriedades.

Suponhamos que um sistema físico seja descrito por uma Lagrangeana  $L(q, \dot{q}, t)$  e outro sistema físico seja descrito por  $L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}f(q, t)$  para alguma função suficientemente diferenciável  $f$ . Então notemos que

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t) dt, \\ = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}f(q, t) dt, \\ = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt + f(q(t_2), t_2) - f(q(t_1), t_1), \\ = S + f(q(t_2), t_2) - f(q(t_1), t_1), \quad (1.10)$$

*i.e.*, as ações  $S$  e  $S'$  diferem por uma constante. Assim, ao variar a trajetória  $q(t)$  mantendo fixas as configurações em  $t_1$  e  $t_2$  teremos que  $\delta S = \delta S'$ . Logo, uma trajetória satisfaz o Princípio de Hamilton para a ação  $S$  se, e somente se, o satisfaz para a ação  $S'$ . As duas Lagrangeanas são na verdade equivalentes e descrevem precisamente a mesma dinâmica.

Consideremos ainda dois sistemas isolados do restante do Universo descritos por Lagrangeanas  $L_1$  e  $L_2$ . Se os dois sistemas não interagem entre si, a Lagrangeana do sistema completo há de ser  $L_1 + L_2$  para que as Equações de Euler-Lagrange valham de maneira independente para cada sistema, visto que cada um dos dois sistemas pode ser visto como um sistema isolado. Assim, a Lagrangeana (e portanto a ação) é aditiva.

Para determinar a Lagrangeana de um sistema de partículas, procederemos impondo condições de simetria. Isso requer que prestemos atenção à estrutura de simetrias da Mecânica Clássica.

### 1.3 O Grupo de Galilei

Para que possamos descrever sistemas Mecânicos, somos forçados a escolher de maneira arbitrária um referencial a partir do qual faremos as medições de nosso interesse. Se permitirmos que a escolha de referencial seja completamente arbitrária, teremos dificuldade em lidar com a teoria. Ao fazer uma curva em um carro, percebemos que somos puxados para o exterior da curva, e trabalhar no referencial do carro em movimento nos forçaria a considerar este efeito na dinâmica. Em compensação, o referencial de alguém que observa o carro da rua não necessita de tal efeito.

Por sorte, sempre podemos tomar um referencial em que valham a homogeneidade e isotropia do espaço e do tempo. Um tal referencial é conhecido como um referencial inercial.

Homogeneidade significa que todos os pontos estão em pé de igualdade. No caso espacial, significa que o mundo não possui uma origem preferida, e portanto podemos colocar a origem do nosso sistema de coordenadas em qualquer lugar. As posições  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  de duas partículas isoladas do restante do Universo não tem significado físico intrínseco: é sua diferença  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  que tem.

Isso não significa que  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  não podem aparecer nas equações de movimento, apenas que a dinâmica deve depender de diferenças de posições, e não dos valores específicos das posições. Do contrário, o Universo teria um local predileto para chamar de origem: aquele em que os valores das posições entram nas equações de movimento. Como não observamos algo do tipo, assume-se que o Universo é homogêneo.

Isotropia significa que todas as direções estão em pé de igualdade. O mundo não prefere a esquerda à direita, nem cima a baixo, nem a direita a cima. Portanto, podemos apontar os nossos eixos coordenados na direção que desejarmos: o Universo não se importa com qual direção chamamos de  $x$ , qual chamamos de  $y$  e qual chamamos de  $z$ .

Em particular, isso implica que a dinâmica de uma partícula livre deve independe da direção de sua velocidade. Do contrário, o Universo estaria mostrando preferência por alguma direção.

A homogeneidade do tempo é um reflexo do fato que não há razão para crermos que um instante de tempo é preferido em relação a outro, e por consequência a dinâmica

de uma partícula livre não pode depender explicitamente do tempo. O Universo não se importa com o instante em que iniciamos o cronômetro.

A isotropia do tempo pode soar como algo curioso, dado que significa que não há distinção entre passado e futuro. Não há mistério: a Mecânica Clássica de fato não distingue o passado do futuro. Todo movimento que ocorre num sentido do tempo poderia ocorrer no sentido oposto sem problema algum. A diferença entre passado e futuro não ocorre em Mecânica Clássica, e será necessário o estudo da Mecânica Estatística para compreender o porquê de não observarmos o tempo como algo isotrópico.

Estas conclusões podem ser expressas de maneira mais matemática. Suponhamos que um evento ocorra no instante  $t$  em uma posição  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  num dado sistema de coordenadas. As imposições de homogeneidade e isotropia espacial e homogeneidade temporal podem ser sintetizadas na informação de que as equações de movimento devem ser mantidas invariantes sob transformações da forma

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

onde  $R$  é uma matriz  $3 \times 3$  com coeficientes reais satisfazendo  $R^T R = \mathbb{1}$  e  $t_0, x_0, y_0, z_0$  são constantes arbitrárias.

**Exercício 3:**

Seja  $R$  uma matriz quadrada com coeficientes reais. Mostre que  $R^T R = \mathbb{1}$  se, e somente se,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (R\mathbf{u}) \cdot (R\mathbf{v}) \quad (1.12)$$

para quaisquer dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .

Mostre ainda que uma mudança de base implementada por uma tal matriz  $R$  leva uma base ortonormal em outra base ortonormal. Além disso, mostre que  $\det R = \pm 1$ .

Tais matrizes são conhecidas como matrizes ortogonais. ❖

**Exercício 4:**

Mostre que a Física ser invariante por transformações como as da Eq. (1.11) é equivalente a exigir homogeneidade e isotropia espacial e temporal. ❖

**Exercício 5:**

Mostre que o sinal negativo na primeira componente da matriz da transformação dada na Eq. (1.11) corresponde a reverter a direção do tempo. Mostre que se  $\det R = -1$ , então a transformação troca um sistema de coordenadas espacial orientado pela mão direita para um sistema orientado pela mão esquerda. ❖

Perceba, em particular, que as matrizes satisfazendo  $R^T R = \mathbb{1}$  são precisamente as possíveis rotações do sistema de coordenadas, acompanhadas de uma possível troca de orientação: de mão direita para mão esquerda.

Uma rotação em três dimensões pode ser descrita em termos de três ângulos, conhecidos como ângulos de Euler. Isto pode ser demonstrado formalmente\*, mas também pode ser compreendido de maneira intuitiva: precisamos de dois ângulos,  $\theta$  e  $\phi$ , para especificar uma direção num espaço tridimensional, como fazemos no sistema de coordenadas esféricas. Isto nos permite determinar a nova direção do eixo  $z$ , mas ainda há uma infinidade de possíveis direções nas quais os eixos  $x$  e  $y$  podem apontar. Portanto, devemos especificar um terceiro ângulo,  $\psi$ , para determinar a direção dos últimos dois eixos. Como os três eixos são ortogonais e a orientação da base está fixada, determinar a direção do eixo  $z$  e a direção do eixo  $x$  é suficiente para fixar o eixo  $y$  de maneira única, e portanto bastam três ângulos.

Notemos as implicações disto tudo para a Lagrangeana  $L$  de uma partícula livre. Como não há quaisquer interações externas e o tempo é homogêneo, concluímos que  $L$  não pode depender explicitamente do tempo. Como o espaço é homogêneo,  $L$  não pode depender explicitamente da posição  $\mathbf{r}$  da partícula. Logo,  $L$  depende apenas da velocidade  $\mathbf{v}$  da partícula. Contudo, o espaço é isotrópico, e portanto  $L$  não pode depender da direção de  $\mathbf{v}$ , apenas de seu módulo. Portanto, a Lagrangeana de uma partícula livre deve depender apenas de  $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ .

Consideremos este fato à luz das Equações de Euler-Lagrange, Eq. (1.9). Como  $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$ , temos que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_i} \right) = 0. \quad (1.13)$$

Contudo, as funções  $\frac{\partial L}{\partial v_i}$  são funções da velocidade apenas. Portanto, é preciso que  $\mathbf{v}$  seja constante. Ou seja, num referencial inercial, o movimento de uma partícula livre ocorre com velocidade constante (Lei da Inércia).

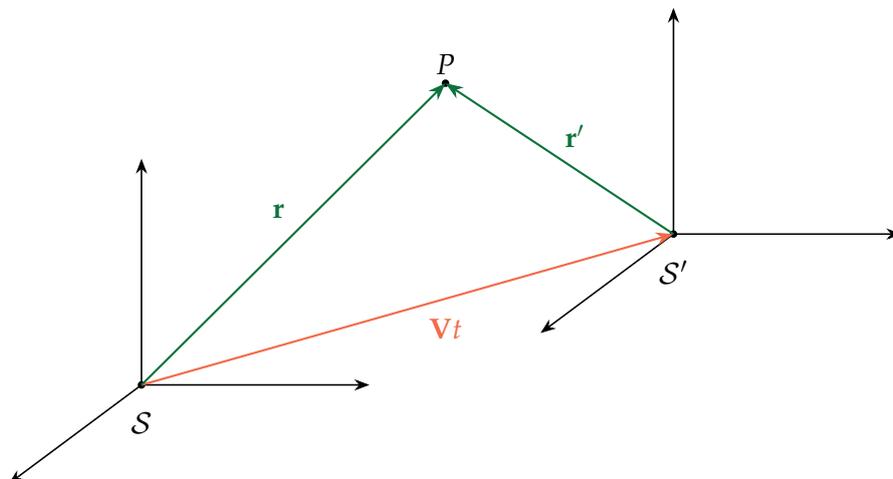
Isto ainda não cobre todas as simetrias disponíveis. Suponha um referencial  $\mathcal{S}'$  se movendo em linha reta com velocidade constante  $\mathbf{V}$  em relação ao referencial inicial  $\mathcal{S}$ . Isto corresponde a transformar as posições das partículas por  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t$ , como representado na Figura 2, enquanto mantemos o tempo inalterado  $t \rightarrow t' = t$  - ou seja, usamos o mesmo cronômetro. Estas transformações são conhecidas como boosts de Galilei. As leis do movimento livre se mantêm inalteradas por esta transformação: o movimento de partículas livres segue ocorrendo de modo a manter a velocidade constante.

Experimentalmente conclui-se que não apenas os movimentos de partículas livres seguem as mesmas leis tanto em  $\mathcal{S}$  quanto em  $\mathcal{S}'$ , mas na verdade todos os movimentos os fazem. Ao invés de apenas um referencial inercial  $\mathcal{S}$ , temos uma infinidade de referenciais inerciais relacionados pelas transformações

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_x & & & \\ -v_y & R & & \\ -v_z & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

---

\*Ver, por exemplo, [6].



**Figura 2.** Um referencial  $S'$  se movendo em linha reta com velocidade constante  $V$  em relação ao referencial inicial  $S$ .

onde  $R, t_0, x_0, y_0$  e  $z_0$  são como na Eq. (1.11) e  $v_x, v_y, v_z$  são constantes representando a velocidade relativa entre os dois referenciais.

O conjunto de todas as transformações de referencial com a forma dada pela Eq. (1.14) forma o chamado Grupo de Galilei, e seu estudo nos permite obter conclusões profundas acerca da Mecânica Clássica, além de perceber como ela se conecta com teorias mais recentes como a Relatividade Restrita e a Mecânica Quântica. Tratamentos mais profundos sobre o Grupo de Galilei podem ser encontrados, por exemplo, em [5, 6, 15, 30, 46].

**Exercício 6:**

Denotaremos as transformações descritas na Eq. (1.14) por

$$G(\pm, t_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}, R), \quad (1.15)$$

onde  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  e  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ .

Denotamos o conjunto de todas as matrizes  $n \times n$  com coeficientes reais por  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . Denotamos

$$\text{SO}(3) = \{R \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}); R^T R = \mathbb{1}, \det R = +1\}. \quad (1.16)$$

Considere o conjunto  $\mathcal{G}_+^\uparrow$  - conhecido como o Grupo de Galilei próprio ortócrono - definido por

$$\mathcal{G}_+^\uparrow = \{G(+, 0, \mathbf{0}, \mathbf{v}, R); \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, R \in \text{SO}(3)\}. \quad (1.17)$$

Denotando o produto usual de matrizes por  $\cdot$ , mostre que

- i.  $g_1 \cdot g_2 \in \mathcal{G}_+^\uparrow$ , para quaisquer  $g_1, g_2 \in \mathcal{G}_+^\uparrow$  ( $\mathcal{G}_+^\uparrow$  é fechado sob  $\cdot$ );
- ii.  $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ , para quaisquer  $g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{G}_+^\uparrow$  (associatividade);

iii. existe um elemento  $e \in \mathcal{G}_+^\uparrow$  tal que  $g \cdot e = e \cdot g = g$ , para todo  $g \in \mathcal{G}_+^\uparrow$  (existência de elemento neutro);

iv. para todo  $g \in \mathcal{G}_+^\uparrow$ , existe  $g^* \in \mathcal{G}_+^\uparrow$  tal que  $g \cdot g^* = g^* \cdot g = e$  (existência de inverso).

Um conjunto  $G$  dotado de uma operação  $\cdot$  que satisfaça as quatro condições acima é dito ser um grupo. ✚

### Exercício 7:

Considere o conjunto  $\mathcal{G}_c$  definido por

$$\mathcal{G}_c = \{G(+, t_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}, R); \det R = +1\}. \quad (1.18)$$

Suponha a transformação de coordenadas de um referencial  $\mathcal{S}$  para um referencial  $\mathcal{S}'$  é dada por  $G(+, t_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}, R) \in \mathcal{G}_c$ . Suponha a transformação de coordenadas do referencial  $\mathcal{S}'$  para um referencial  $\mathcal{S}''$  é dada por  $G(+, t'_0, \mathbf{r}'_0, \mathbf{v}', R') \in \mathcal{G}_c$ . Mostre que a transformação de coordenadas de  $\mathcal{S}$  para  $\mathcal{S}''$  é dada por

$$G(+, t'_0 + t_0, \mathbf{r}'_0 + R'\mathbf{r}_0 + t_0\mathbf{v}', \mathbf{v}' + R'\mathbf{v}, R'R). \quad (1.19)$$

Podemos denotar isso como

$$G(+, t'_0, \mathbf{r}'_0, \mathbf{v}', R') \circ G(+, t_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}, R) = G(+, t'_0 + t_0, \mathbf{r}'_0 + R'\mathbf{r}_0 - \mathbf{v}'t_0, \mathbf{v}' + R'\mathbf{v}, R'R). \quad (1.20)$$

Mostre que  $\mathcal{G}_c$ , quando equipado com a operação de composição de transformações  $\circ$ , é um grupo. ✚

Note que um elemento de  $\mathcal{G}_c$  é completamente determinado ao fornecermos 10 parâmetros contínuos:  $t_0$  (1 parâmetro),  $\mathbf{r}_0$  (3 parâmetros),  $v$  (3 parâmetros) e  $R$  (3 parâmetros).

A afirmação de que as Leis da Física devem ser invariantes sob transformações de Galilei (ou seja, elementos do grupo  $\mathcal{G}$ ) constitui Princípio da Relatividade de Galilei.

O Princípio da Relatividade de Galilei nos informa que a dinâmica deve ser invariante sob transformações  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{V}$ . Como já sabemos que a Lagrangeana é da forma  $L(v^2)$ , isto parece sugerir que  $L$  precisa ser constante e, portanto, não há dinâmica. Não se precipite: como sempre podemos adicionar uma derivada total do tempo à Lagrangeana sem alterar a dinâmica descrita. Assim, a verdadeira condição que temos sobre a Lagrangeana é

$$L(v^2) + \frac{d}{dt}f(\mathbf{r}, t) = L((\mathbf{v} + \mathbf{V})^2). \quad (1.21)$$

Como isso deve valer para qualquer velocidade  $\mathbf{V}$ , consideremos o caso de uma velocidade infinitesimal. Neste caso, temos

$$(\mathbf{v} + \mathbf{V})^2 = v^2 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} + V^2 = v^2 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} + \mathcal{O}(V^2) \approx v^2 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}. \quad (1.22)$$

Expandindo a Lagrangeana em polinômio de Taylor e usando a regra da cadeia na derivada  $\frac{df}{dt}$  temos que

$$\begin{aligned} L(v^2) + \nabla f \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial f}{\partial t} &= L(v^2) + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} \frac{\partial L}{\partial v^2}, \\ \nabla f \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial t} &= 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} \frac{\partial L}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \left( 2 \frac{\partial L}{\partial v^2} \mathbf{V} - \nabla f \right) \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Derivando com relação a  $v_i$  teremos que

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial L}{\partial v^2} V_i - \frac{\partial f}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial}{\partial v_i} \left( \frac{\partial L}{\partial v^2} \right) \mathbf{V} \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ 2 \frac{\partial L}{\partial v^2} V_i - \frac{\partial f}{\partial x_i} + 4v_i \frac{\partial^2 L}{\partial (v^2)^2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \nabla f &= 2 \frac{\partial L}{\partial v^2} \mathbf{V} + 4 \frac{\partial^2 L}{\partial (v^2)^2} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Sabemos que  $\nabla f$  é independente de  $\mathbf{v}$ . O primeiro termo do lado direito da Eq. (1.24) pode ser independente de  $\mathbf{v}$  se  $\frac{\partial L}{\partial v^2}$  for constante com respeito a  $v^2$ . Contudo, o segundo termo depende vetorialmente de  $\mathbf{v}$ , e portanto  $\nabla f$  só pode ser independente de  $\mathbf{v}$  se o segundo termo for nulo, *i.e.*, se

$$\frac{\partial^2 L}{\partial (v^2)^2} = 0. \quad (1.25)$$

Isso automaticamente garante que o primeiro termo seja independente de  $\mathbf{v}$ . Como  $L$  é função apenas de  $v^2$ , vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial (v^2)^2} &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial v^2} &= \frac{m}{2}, \\ L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= \frac{mv^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Na última passagem omitimos a constante de integração, visto que ela não tem significado físico. A constante de integração  $m$  é arbitrária, mas em geral a identificamos com a massa da partícula. Perceba que as trajetórias determinadas pela Lagrangeana  $L$  são as mesmas determinadas pela Lagrangeana  $\lambda L$  para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Isso reflete o fato de que somos livres para escolher as unidades de medida da Lagrangeana.

Naturalmente,  $\frac{mv^2}{2}$  pode ser identificado como a energia cinética da partícula livre,  $T$ , e, portanto, para uma partícula livre temos  $L = T$ .

Para um sistema de  $N$  partículas livres, temos (utilizando a aditividade da Lagrangeana) em coordenadas cartesianas

$$L(x, \dot{x}, t) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2}, \quad (1.27)$$

ou seja, a Lagrangeana é meramente a energia cinética do sistema.

## 1.4 Sistemas Fechados

Em geral, queremos lidar com sistemas possuindo interação. Por exemplo, suponha um sistema de  $N$  partículas isolado do restante do Universo. As partículas interagem segundo um potencial  $V(x)$ , onde  $x$  é a configuração do sistema dada em coordenadas cartesianas. Note que para que o sistema seja invariante sob transformações de Galilei, é preciso que o potencial tenha a forma

$$V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_{N-1} - \mathbf{r}_N), \quad (1.28)$$

mas não nos preocuparemos com isso por ora.

As equações de Newton que descrevem um tal sistema são dadas pela Eq. (1.1), e a Lagrangeana do sistema deve prever o mesmo movimento por meio das Equações de Euler-Lagrange.

Notemos que

$$m_i \ddot{x}_i = \frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i). \quad (1.29)$$

Ademais,

$$m_i \dot{x}_i = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left( \sum_{j=1}^{3N} \frac{m_j \dot{x}_j^2}{2} \right) = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}, \quad (1.30)$$

onde  $T = \sum_{i=1}^{3N} \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2}$  é a energia cinética do sistema. Assim, a Eq. (1.1) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) &= -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Esta expressão é semelhante, mas não igual, às Equações de Euler-Lagrange como escritas na Eq. (1.9). Contudo, sabemos que

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = 0. \quad (1.32)$$

Portanto, podemos, sem risco de punição, escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (V - T) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} (T - V) \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} (T - V) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} (T - V) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Ao comparar a Eq. (1.33) com as Equações de Euler-Lagrange na Eq. (1.9), concluímos que, em coordenadas cartesianas,

$$L(x, \dot{x}, t) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} - V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_{N-1} - \mathbf{r}_N). \quad (1.34)$$

Note que o sinal entre as duas quantidades é negativo: a Lagrangeana não é a energia do sistema.

Num sistema de coordenadas arbitrário ainda podemos escrever

$$L(q, \dot{q}, t) = T - V(q), \quad (1.35)$$

mas agora não sabemos como expressar a energia cinética  $T$  em termos de coordenadas generalizadas  $q$ .

Suponhamos que as coordenadas cartesianas  $x$  sejam dadas em termos das  $n$  coordenadas generalizadas  $q$  por meio de funções  $x_i = x_i(q)$ . Neste caso, a regra da cadeia fornece que

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j}. \quad (1.36)$$

Note que  $n$  pode ou não coincidir com  $3N$ , dependendo do sistema ser ou não vinculado.

Logo, a energia cinética do sistema será

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{3N} \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2}, \\ &= \sum_{i,j} \frac{m_i}{2} \delta_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \\ &= \sum_{i,j,k,l} \frac{m_i}{2} \delta_{ij} \dot{q}_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_l \frac{\partial x_j}{\partial q_l}, \\ &= \sum_{i,k,l} \frac{m_i}{2} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,l} a_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l, \end{aligned} \quad (1.37)$$

onde introduzimos o delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad (1.38)$$

e denotamos

$$a_{kl}(q) = \sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_l}. \quad (1.39)$$

Note que  $a_{kl}$  de fato é uma função apenas da configuração  $q$  do sistema, visto que  $\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$  são funções apenas de  $q$ .

**\* Exercício 8:**

Dada uma função  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$f(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)) \quad (1.40)$$

definimos sua matriz Jacobiana  $Df(x)$  como a matriz  $n \times m$  dada por[44]

$$Df(x) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

Como as derivadas parciais  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  são funções do ponto em que são calculadas,  $Df(x)$  é uma função do ponto  $x$ . Perceba que no caso  $n = m = 1$  temos que  $Df(x) = f'(x)$ . Isso não é coincidência: a matriz Jacobiana é uma generalização da derivada - conhecida como derivada de Fréchet - para funções de  $\mathbb{R}^m$  em  $\mathbb{R}^n$ .

Suponha que uma função  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  dependa indiretamente do tempo por meio de seus argumentos. Mostre que

$$\begin{pmatrix} \dot{f}_1 \\ \vdots \\ \dot{f}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

**Exercício 9:**

Mostre que podemos escrever a energia cinética de um sistema sem vínculos de  $N$  partículas como

$$T = \frac{1}{2} (\dot{x}_1 \cdots \dot{x}_{3N}) \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_{3N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_{3N} \end{pmatrix}. \quad (1.43)$$

Utilize esta expressão e o exercício anterior para mostrar que

$$T = \frac{1}{2} (\dot{q}_1 \cdots \dot{q}_{3N}) \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,3N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{3N,1} & \cdots & a_{3N,3N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_{3N} \end{pmatrix}, \quad (1.44)$$

onde os coeficientes  $a_{kl}$  são dados pela Eq. (1.39).

**Exercício 10:**

Nos casos que consideramos em Mecânica, geralmente nos restringimos a transformações de coordenadas que satisfazem  $\det Df(x) \neq 0$  em todo ponto, pois isto é uma das hipóteses do Teorema da Aplicação Inversa[29, 44], que nos permite inverter a transformação entre os sistemas de coordenadas.

Utilizando este fato, a Eq. (1.39) e os exercícios anteriores, conclua que a matriz  $a_{kl}(q)$  sempre é inversível em qualquer configuração  $q$ .

**Exercício 11:**

Considere uma partícula de massa  $m$  em queda livre num campo gravitacional uniforme com aceleração  $g$ . Escreva a Lagrangeana.

**Exercício 12:**

Considere duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$  interagindo gravitacionalmente. Escreva a Lagrangeana. ✚

**Exercício 13:**

Considere o problema do oscilador harmônico simples: uma massa  $m$  presa a uma mola de constante elástica  $k$ . Escreva a Lagrangeana. ✚

**Exercício 14:**

Considere um pêndulo com massa  $m$  e comprimento  $l$  num campo gravitacional uniforme de aceleração  $g$ . Escreva a Lagrangeana. ✚

**1.5 Teorias Efetivas**

Consideremos o problema de duas massas  $m_1$  e  $m_2$  interagindo. Suas posições são denotadas por  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ . Para que a dinâmica seja invariante de Galileu, é preciso que o potencial dependa apenas da distância entre as duas massas, *i.e.*, o potencial tem a forma  $V(r)$ , onde definimos  $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  e  $r \equiv \|\mathbf{r}\|$ . A Lagrangeana é dada por

$$L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2) = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - V(r), \quad (1.45)$$

onde  $v_i \equiv \|\dot{\mathbf{r}}_i\|$ .

Podemos reescrevê-la de um modo mais agradável em termos do vetor  $\mathbf{r}$ . Começemos redefinindo as coordenadas de modo que  $m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$ .

**\* Exercício 15:**

Utilize as Equações de Euler-Lagrange para obter que

$$\frac{d}{dt}(m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2) = \mathbf{0}. \quad (1.46)$$

Utilize este resultado para mostrar que sempre é possível escolher coordenadas tais que  $m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$  a todo instante de tempo. ✚

O referencial em que  $m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$  é conhecido como referencial de centro de massa do sistema. Neste referencial, temos que

$$\mathbf{r}_1 = +\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (1.47)$$

Segue pois que

$$v_1^2 = \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \|\dot{\mathbf{r}}\|^2, \quad v_2^2 = \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \|\dot{\mathbf{r}}\|^2. \quad (1.48)$$

Ao substituir estas expressões na Lagrangeana temos que

$$\begin{aligned}
L &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - V(\boldsymbol{r}), \\
&= \frac{m_1}{2} \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \|\dot{\boldsymbol{r}}\|^2 + \frac{m_2}{2} \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \|\dot{\boldsymbol{r}}\|^2 - V(\boldsymbol{r}), \\
&= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \|\dot{\boldsymbol{r}}\|^2 - V(\boldsymbol{r}), \\
&= \frac{\mu}{2} \|\dot{\boldsymbol{r}}\|^2 - V(\boldsymbol{r}), \tag{1.49}
\end{aligned}$$

onde definimos a massa reduzida  $\mu$  por

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{1.50}$$

Vemos agora que o problema de dois corpos descrito no referencial do centro de massa é equivalente a um problema de um único corpo.

Suponhamos que estamos descrevendo um sistema em que  $m_1 \ll m_2$ . Um exemplo de tal sistema seria o problema descrito pela órbita da Terra em torno do Sol. Neste caso, note que

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \\
&= \frac{m_1}{1 + \frac{m_1}{m_2}}, \\
&= m_1 + \mathcal{O}\left(\frac{m_1}{m_2}\right), \tag{1.51}
\end{aligned}$$

onde a notação  $\mathcal{O}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)$  significa que os demais termos são proporcionais a  $\frac{m_1}{m_2}$  ou potências maiores. Como  $\frac{m_1}{m_2} \ll 1$ , iremos desprezar estes termos.

Note que nesta aproximação temos para  $\mathbf{r}_1$  que

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= +\frac{m_2}{m_1 + m_2} \boldsymbol{r}, \\
&= \boldsymbol{r} + \mathcal{O}\left(\frac{m_1}{m_2}\right). \tag{1.52}
\end{aligned}$$

Para  $\mathbf{r}_2$ ,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \boldsymbol{r}, \\
&= \mathbf{0} + \mathcal{O}\left(\frac{m_1}{m_2}\right). \tag{1.53}
\end{aligned}$$

Logo, na aproximação de ordem zero em  $\frac{m_1}{m_2}$ , o movimento no referencial do centro de massa é tal que

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{0} \tag{1.54}$$

e  $\mathbf{r}_1$  é determinado pela Lagrangeana efetiva

$$L(\mathbf{r}_1, \dot{\mathbf{r}}_1) = \frac{m_1 v_1^2}{2} - V(r_1). \quad (1.55)$$

Este procedimento pode parecer pouco convencional. O que nos permite desprezar estes termos? Eles deixaram de influenciar a Física do sistema?

A resposta não vem da teoria, vem do fato de que Física é uma ciência inerentemente experimental. Não há sentido em querermos prever a evolução de um sistema com uma precisão que nossos sensores são incapazes de medir. Tomemos um exemplo: a Lei da Gravitação de Newton. Segundo Newton, a intensidade da força de atração gravitacional entre dois corpos pontuais de massas  $m$  e  $M$  é dada por

$$F = \frac{GMm}{r^2}, \quad (1.56)$$

onde  $r$  é a distância entre os corpos. A lei pode ser generalizada para corpos esféricos se considerarmos que a distância é medida entre os centros de massa dos corpos.

Consideremos um corpo esférico com a massa  $M$  e raio  $R$  da Terra e uma partícula pontual com massa  $m$ . Suponhamos ainda que o corpo de massa  $m$  esteja a uma altura  $h = 10$  m do solo da Terra. Note que a distância entre os centros de massa dos corpos é  $R + h$ .

A Lei de Newton fornece

$$\begin{aligned} F &= \frac{GMm}{(R+h)^2}, \\ &= \frac{GMm}{R^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Expandindo o segundo termo em Taylor e definindo  $g = \frac{GM}{R^2}$  temos que

$$F = mg \left( 1 - 2\frac{h}{R} + 3\left(\frac{h}{R}\right)^2 \right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{h}{R}\right)^3\right). \quad (1.58)$$

Agora podemos inserir os números. Aproximando o raio da Terra por  $R = 6371$  km, temos que

$$\frac{h}{R} \approx 1.570 \times 10^{-6}, \quad \left(\frac{h}{R}\right)^2 \approx 2.464 \times 10^{-12}. \quad (1.59)$$

Logo, ao desprezar os termos proporcionais a  $\left(\frac{h}{R}\right)^3$  ou potências maiores, temos que a força entre a Terra e a partícula de massa  $m$  é

$$F = mg \left( 1 - 3.140 \times 10^{-6} + 7.391 \times 10^{-12} \right). \quad (1.60)$$

Se o aparato experimental a ser usado é capaz de distinguir forças tão pequenas, a teoria deve considerar os efeitos de ordem  $\frac{h}{R}$  ou mesmo de ordens superiores. Se estes efeitos são irrelevantes, podemos tomar a aproximação simplificadora

$$F = mg. \quad (1.61)$$

O mesmo raciocínio se aplica à Lagrangeana da Eq. (1.55): se o aparato experimental é sensível a efeitos da ordem de  $\frac{m_1}{m_2}$ , devemos considerar estes termos na Lagrangeana. Do contrário, somos livres para descartá-los.

Teorias que descrevem apenas “pedaços” de uma teoria maior são conhecidas como teorias efetivas, e ocorrem por toda a Física. A Eletrodinâmica de Maxwell é uma teoria efetiva do Modelo Padrão da Física de Partículas. A Lei de Gravitação de Newton é uma teoria efetiva da Relatividade Geral. Acredita-se - ou ao menos deseja-se - que a Relatividade Geral e o Modelo Padrão da Física de Partículas sejam teorias efetivas de uma teoria de tudo mais fundamental e ainda desconhecida. De todo modo, temos certeza que são teorias que não valem em todas as escalas. Existem efeitos que estas teorias são incapazes de explicar. Em [53], Anthony Zee descreve isso de maneira maravilhosa e, como sempre, bem humorada:

Se alguém tentar lhe vender uma teoria de campos clamando que ela vale para energias arbitrariamente altas, você deveria conferir se ele trabalhava com venda de carros usados.

Notemos que estas aproximações dependem fundamentalmente das hipóteses de que  $h \ll R$  e  $m_1 \ll m_2$ . No exemplo que demos utilizando a Lei da Gravitação de Newton, assumimos que a massa  $m$  estava a uma altura fixa  $h \ll R$ . Se as dimensões de comprimento características do problema fossem muito maiores - por exemplo, se o corpo de massa  $m$  fosse um satélite orbitando a Terra a milhares de quilômetros do solo - os termos que desprezamos não seriam tão pequenos, e mesmo a expansão em Taylor não seria uma boa aproximação.

Isso expressa o fato de que teorias efetivas “quebram” em certas escalas. Se levarmos a partícula de massa  $m$  muito alto, a descrição dada por  $F = mg$  deixa de ser aplicável e precisamos utilizar uma teoria mais precisa, como a Lei da Gravitação de Newton. Se os campos gravitacionais se tornarem muito intensos, mesmo a Lei da Gravitação de Newton pode falhar e seremos obrigados a utilizar a Relatividade Geral. Se os campos gravitacionais forem incrivelmente fortes mesmo em espaços incrivelmente pequenos - como no coração de um buraco negro ou no Big Bang - a descrição clássica falha e precisamos considerar efeitos quânticos. Precisamos de uma Teoria da Gravitação Quântica ainda inexistente para estudar Física nestas escalas.

Por outro lado, isso justifica um dos porquês de ainda estudarmos Mecânica Clássica mesmo conhecendo teorias mais complexas como Mecânica Quântica e Relatividade Geral. Não apenas estas teorias são baseadas no que já se sabia sobre a Mecânica Clássica e recuperam-na nas escalas apropriadas, mas elas são cálculos muito mais complexos. Nas escalas em que a Mecânica Clássica provê uma boa descrição e utilizando aparatos que

não sejam sensíveis a efeitos mais delicados que as previsões clássicas não-relativísticas, não há razão para utilizarmos teorias mais complicadas.

Estas ideias nos permitem obter uma compreensão mais profunda sobre a Mecânica Clássica em si. Por que uma maçã cai de uma árvore seguindo a lei  $F = mg$ ? A noção de teoria efetiva nos permite concluir que isso não acontece. Sabemos que  $F = mg$  é uma aproximação da Eq. (1.56), mas, para variações pequenas na distância  $r$ , a maçã se comporta como se seguisse a lei  $F = mg$ . Por que os planetas se movem segundo a Eq. (1.56)? Eles não o fazem. Esta é apenas uma aproximação do resultado previsto pela Relatividade Geral, mas para as escalas planetárias, os corpos se movem como se seguissem a Eq. (1.56).

Como as partículas sabem qual é o caminho que extremiza a ação? Elas não sabem. Mas nas escalas em que a Mecânica Clássica funciona, elas se comportam como se soubessem. De fato, quando os efeitos quânticos entram em jogo, temos uma descrição em que é preciso considerar que todos os caminhos ligando os pontos inicial e final podem ser percorridos, porém com probabilidades distintas. Para partículas clássicas, o caminho que maximiza a ação é extraordinariamente mais provável que os demais, enquanto que para partículas inerentemente quânticas, como um elétron, diversas trajetórias são igualmente prováveis. Isto é responsável por conferir às partículas quânticas propriedades ondulatórias.

Discussões maravilhosas sobre como as partículas clássicas “preveem” o caminho de menor ação podem ser encontradas no Capítulo 26 do Volume I e no Capítulo 19 do Volume II de [14].

**Exercício 16** [Expansão em Multipolos]:

Chamamos de dipolo elétrico físico uma distribuição de cargas elétricas de mesma intensidade e sinais opostos,  $+q$  e  $-q$ , separadas por uma distância finita  $d$ . O potencial elétrico  $\varphi$  num ponto  $P$  é dado em termos das distâncias  $r_+$  e  $r_-$  às cargas  $+q$  e  $-q$  (respectivamente) por

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right), \quad (1.62)$$

onde  $\epsilon_0$  é uma constante chamada de permissividade elétrica do vácuo.

É mais conveniente denotarmos o ponto  $P$  por um vetor  $\mathbf{r}$  medido a partir da origem de um sistema de coordenadas. Por simplicidade, tomamos esta origem como estando na metade da reta que separa as duas cargas.

Suponha que  $r \equiv \|\mathbf{r}\|$  seja tal que  $r \gg d$ . Mostre que o potencial elétrico pode ser escrito como

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2} + \frac{1}{r} \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{r^2}\right), \quad (1.63)$$

onde  $\theta$  é o ângulo formado entre o ponto  $P$  e a carga  $+q$  (ver Figura 3).

Quando se está distante do dipolo físico, seu campo se comporta como  $\frac{1}{r^2}$ . O potencial elétrico de configurações de carga mais complexas também admite uma expansão em

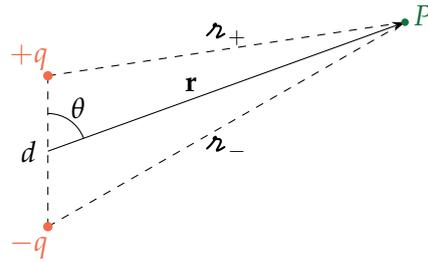


Figura 3. Esquema para o Exercício 16. Baseado na Figura 3.26 de [18].

potências de  $\frac{1}{r}$ , que é chamada de expansão em multipolos. Para um ponto  $\mathbf{r}$  que está fora da configuração de cargas (que é o caso de interesse quando se observa a configuração a grandes distâncias) tem-se:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{A_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}}, \quad (1.64)$$

onde  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  são funções conhecidas como harmônicos esféricos e  $A_{lm}$  são constantes que dependem da distribuição de cargas sendo levada em consideração. ✖

#### Exercício 17:

Considere um pêndulo simples de massa  $m$ , comprimento  $l$  num campo gravitacional  $g$ . Assuma que o ângulo com a vertical,  $\phi$ , seja tal que, em radianos,  $\phi \ll 1$  a todo instante. Escreva a Lagrangeana efetiva e obtenha a equação de movimento. Compare com a de um oscilador harmônico. ✖

### 1.6 Potenciais Dependentes do Tempo

O procedimento que fizemos na sessão anterior para eliminar as variáveis  $\mathbf{r}_2$  e  $\dot{\mathbf{r}}_2$  da Lagrangeana\* pode ser feito de maneira mais geral, e frequentemente mesmo de maneira intuitiva. Considere por exemplo um dispositivo mecânico que gira o suporte de um pêndulo em um círculo, como ilustrado na Figura 4.

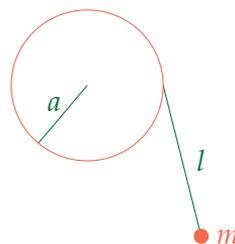


Figura 4. Um dispositivo mecânico gira o suporte de um pêndulo ao longo de um círculo de raio  $a$ .

Mesmo sem resolver as equações de movimento para o sistema como um todo, sabemos em boa aproximação qual a trajetória que o dispositivo fará. Estamos assumindo

\*Em Teoria Quântica de Campos, dizemos que integramos (*integrated out*) o grau de liberdade correspondente a  $\mathbf{r}_2$ .

implicitamente que a massa e o movimento do pêndulo não serão suficientes para danificar o dispositivo ou alterar seu percurso, e portanto já tomamos de antemão qual será seu movimento.

De maneira mais abstrata, temos uma Lagrangeana que descreve dois sistemas interagentes  $A$  e  $B$ :

$$L(q_A, q_B, \dot{q}_A, \dot{q}_B) = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - V(q_A, q_B). \quad (1.65)$$

Se for válido o limite em que a presença do sistema  $A$  não altera de modo considerável o movimento do sistema  $B$ , podemos substituir a configuração  $q_B$  por sua trajetória  $q_B(t)$  e obter

$$\begin{aligned} L(q_A, q_B(t), \dot{q}_A, \dot{q}_B(t)) &= T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B(t), \dot{q}_B(t)) - V(q_A, q_B(t)), \\ L(q_A, \dot{q}_A, t) &= T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(t) - V(q_A, t). \end{aligned} \quad (1.66)$$

A energia cinética  $T_B(t)$  é agora uma derivada total de uma função da configuração e do tempo, e portanto podemos descrever o sistema pela Lagrangeana

$$L(q_A, \dot{q}_A, t) = T_A(q_A, \dot{q}_A) - V(q_A, t), \quad (1.67)$$

que agora depende explicitamente do tempo por meio do potencial  $V$ .

Existe ainda uma outra situação em que a Lagrangeana pode depender explicitamente do tempo mesmo que o potencial não dependa do tempo: caso a nossa escolha de coordenadas generalizadas seja tal que as coordenadas dependam do tempo quando expressas em termos das coordenadas cartesianas. Para um exemplo, estude o comportamento do pêndulo na Figura 4.

**Exercício 18:**

Determine a Lagrangeana para um pêndulo de massa  $m$  e comprimento  $l$  cujo ponto de apoio é rotacionado por um dispositivo em um círculo de raio  $a$  com frequência angular  $\omega$ . Veja a Figura 4. ✖

**Exercício 19:**

Generalize a Eq. (1.37) para o caso em que as coordenadas generalizadas podem depender do tempo. Assuma que as coordenadas cartesianas  $x_i$  são dadas em termos das coordenadas generalizadas  $q_i$  e do tempo  $t$  por meio das equações  $x_i = x_i(q, t)$ . Mostre que

$$T = a_0(q, t) + \sum_k a_k(q, t) \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l} a_{k,l}(q, t) \dot{q}_k \dot{q}_l, \quad (1.68)$$

onde

$$\begin{cases} a_0(q, t) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2, \\ a_k(q, t) = \sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \\ a_{k,l}(q, t) = \sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_l}. \end{cases} \quad (1.69) \quad \text{✖}$$

Note que, sob condições apropriadas de diferenciabilidade, escrever  $x_i = x_i(q, t)$  é equivalente a escrever  $q_i = q_i(x, t)$ .

**Exercício 20:**

Considere uma partícula se movendo em uma dimensão sob a ação de uma força dependente do tempo,  $F(t)$ . Obtenha a Lagrangeana e as equações de movimento. ✖

### 1.7 Leis de Conservação

Encontrar a solução analítica de problemas de Mecânica Clássica ao simplesmente resolver as Equações de Euler-Lagrange é frequentemente difícil, e por vezes mesmo impossível. Em geral, sistemas que apresentam poucas leis de conservação, como o pêndulo duplo, não podem ser solucionados de maneira explícita e devemos recorrer a métodos numéricos ou aproximativos.

Isso possui uma certa intuição\*: uma solução analítica do movimento de um sistema com  $n$  graus de liberdade precisa ter  $2n$  condições iniciais, dado que desejamos resolver  $n$  equações diferenciais de segundo grau. Estas condições iniciais podem ser fornecidas da maneira que desejarmos: posição e velocidade iniciais, posições inicial e final, etc. Em particular, poderíamos especificar a energia, momento, momento angular e outras quantidades características do sistema para determinar seu movimento.

Considere por exemplo uma partícula livre. Ao invés de especificar sua velocidade inicial, poderíamos especificar seu momento linear. Contudo, especificar sua energia não forneceria informações novas sobre o sistema: ela pode ser determinada a partir do momento linear, não são quantidades independentes.

Infelizmente, não nos aprofundaremos nestes temas, que se relacionam aos estudos do caos determinístico e da integrabilidade de sistemas físicos. Ao leitor interessado de maneira profunda, recomenda-se a leitura de, por exemplo, [5, 41, 50]. Um texto a nível mais introdutório é [29]. Para um breve exemplo historicamente relevante, recomenda-se [21].

Nos preocuparemos neste texto em como simetrias e leis de conservação facilitam a resolução de problemas mecânicos. Antes de lidarmos com o resultado geral fornecido pelo Teorema de Noether, estudemos alguns exemplos.

**Exercício 21:**

Considere um sistema descrito por uma Lagrangeana  $L(q, \dot{q})$ , *i.e.*, uma Lagrangeana que não depende explicitamente do tempo. Mostre que a quantidade

$$h = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \tag{1.70}$$

é tal que  $\dot{h} = 0$ . ✖

---

\*Que não deve ser levada muito a sério. Entenda-a como uma versão simplificada do problema, não como uma descrição detalhada.

A quantidade  $h$  definida na Eq. (1.70) é comumente chama de integral de Jacobi ou de função de energia. O nome “função de energia” também não é aleatório: sob condições adequadas,  $h$  é a energia total do sistema  $T + V$ .

Para mostrarmos isso, precisaremos utilizar o chamado Teorema de Euler para Funções Homogêneas. Uma função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser homogênea de grau  $p$  quando, para todo número real não-negativo  $\lambda$ , valer que

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^p f(x_1, \dots, x_n). \quad (1.71)$$

**Teorema [Euler para Funções Homogêneas]:**

Seja  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável homogênea de grau  $p$ . Vale a igualdade:

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = p f(x_1, \dots, x_n). \quad (1.72)$$

Ademais, se  $f$  satisfaz a equação diferencial dada na Eq. (1.72), então  $f$  é homogênea de grau  $p$ .  $\square$

*Demonstração:*

Definimos  $y_i = \lambda x_i$ , onde  $\lambda$  é suposto não-negativo. Note que

$$f(y_1, \dots, y_n) = \lambda^p f(x_1, \dots, x_n). \quad (1.73)$$

Derivando ambos os lados da expressão com relação a  $\lambda$  enquanto mantemos os  $x_i$  constantes, tem-se

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial y_i}{\partial \lambda} \frac{\partial f}{\partial y_i}(y_1, \dots, y_n) &= p \lambda^{p-1} f(x_1, \dots, x_n), \\ \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial y_i}(y_1, \dots, y_n) &= p \lambda^{p-1} f(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (1.74)$$

Tomemos agora  $\lambda = 1$ . Então, como agora  $y_i = \lambda x_i = x_i$ , a equação anterior se reduz a

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = p f(x_1, \dots, x_n). \quad (1.75)$$

Suponha agora que  $f$  é uma função diferenciável satisfazendo a Eq. (1.72). Tome  $x_1, \dots, x_n$  fixos e defina  $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$g(\lambda) = \lambda^{-p} f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n). \quad (1.76)$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\lambda} &= -p \lambda^{-p-1} f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + \lambda^{-p} \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial (\lambda x_i)}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \\ &= -p \lambda^{-p-1} f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + \lambda^{-p-1} \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \\ &= \lambda^{-p-1} \left[ -p f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \right], \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Portanto,  $g$  é uma função constante, *i.e.*,  $g(\lambda) = g(1), \forall \lambda \geq 0$ . Note que esta igualdade é, na verdade,

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= g(1), \\ \lambda^{-p} f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) &= f(x_1, \dots, x_n), \\ f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) &= \lambda^p f(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (1.78)$$

o que conclui a demonstração. ■

Consideremos agora mais uma vez a integral de Jacobi  $h$ . Assumindo que o potencial  $V$  é independente das velocidades generalizadas\*, temos que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad (1.79)$$

e portanto

$$h = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - L. \quad (1.80)$$

Suponhamos agora que as coordenadas generalizadas são independentes do tempo. Neste caso, a Eq. (1.68) se reduz à (1.37), e vemos que a energia cinética  $T$  é uma função homogênea de grau 2 das velocidades generalizadas. Tem-se então, pelo Teorema de Euler para Funções Homogêneas, que

$$\begin{aligned} h &= 2T - L, \\ &= 2T - T + V, \\ &= T + V. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Logo, para problemas em que valem as condições

- i. a Lagrangeana não depende explicitamente do tempo;
- ii. as coordenadas generalizadas não dependem explicitamente do tempo;
- iii. o potencial  $V$  não depende das velocidades generalizadas

vale que a energia total do sistema  $E = T + V$  é conservada.

Em teorias mais fundamentais, como a Mecânica Quântica ou a Relatividade Geral, passa a ser mais frequente deixarmos de entender energia como sendo  $E = T + V$  e favorecer a integral de Jacobi (que passa a ser chamada de energia) em seu lugar. A expressão  $E = T + V$  é conveniente apenas em problemas simples de Mecânica, que satisfazem as condições que acabamos de enumerar. A integral de Jacobi, por outro lado, é conservada em contextos muito mais amplos: basta que a Lagrangeana independa do tempo.

---

\*Podemos considerar problemas mais gerais que os que vimos até agora ao permitir que  $V$  dependa das velocidades generalizadas. Isto nos permitirá, por exemplo, obter uma Lagrangeana para uma partícula se movendo sob a ação de um campo eletromagnético.

**Exercício 22:**

Considere o pêndulo do Exercício 17. À época, não podíamos justificar a hipótese de que  $\phi \ll 1$  para todos os instantes de tempo. Contudo, agora temos ferramentas para isto. Mostre que a energia é conservada no problema do pêndulo simples e utilize este fato para mostrar que

$$|\phi| \leq \arccos\left(1 - \frac{E}{mgl}\right), \quad (1.82)$$

onde convencionamos que a energia potencial se anula para  $\phi = \frac{\pi}{2}$ . ❌

Há ainda um outro exemplo simples que podemos explorar antes de lidar com o caso geral: o caso em que uma coordenada generalizada é cíclica, *i.e.*, não aparece de maneira explícita na Lagrangeana.

**Exercício 23:**

Seja um sistema descrito por uma Lagrangeana  $L(q, \dot{q}, t)$ . Suponha que exista algum  $i$  para o qual  $q_i$  não ocorre de maneira explícita na Lagrangeana  $L$ , *i.e.*,  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ . Mostre que a quantidade

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (1.83)$$

conhecido como momento generalizado canonicamente conjugado à coordenada  $q_i$ , é conservada, *i.e.*,  $\dot{p}_i = 0$ . ❌

Para compreender a razão para o nome “momento generalizado”, é útil explorarmos alguns casos particulares.

**Exercício 24:**

Considere uma partícula sujeita a um potencial  $V(x, t)$ . Calcule os momentos generalizados canonicamente conjugados às coordenadas cartesianas. ❌

**Exercício 25:**

Considere uma partícula sujeita a um potencial central, *i.e.*, um potencial da forma  $V(r)$ , onde  $r = \|\mathbf{r}\|$  e  $\mathbf{r}$  é o vetor posição da partícula. Escreva a Lagrangeana em coordenadas esféricas e calcule os momentos canonicamente conjugados às coordenadas esféricas. Quais momentos são conservados? ❌

Estas quantidades conservadas são, na verdade, casos particulares de um resultado muito mais geral conhecido como Teorema de Noether.

Seja um sistema físico descrito por uma Lagrangeana  $L(q, \dot{q}, t)$ . Consideremos uma transformação do tempo e das coordenadas dada por

$$t \rightarrow t' = t + \epsilon X(q(t), t), \quad q_i(t) \rightarrow q'_i(t') = q_i(t) + \epsilon \Psi_i(q(t), t), \quad (1.84)$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro infinitesimal.

Se a ação for mantida invariante por esta transformação, *i.e.*, se

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2'} L(q'(t'), \dot{q}'(t'), t') dt' - \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt = 0, \quad (1.85)$$

dizemos que a transformação dada na Eq. (1.84) é uma simetria contínua da ação.

Perceba que a condição de invariância deve valer independentemente da validade das equações de movimento para que a transformação seja considerada uma simetria. A simetria é uma propriedade da Lagrangeana que deve valer mesmo antes de extremizarmos a ação para obter as equações de movimento: ela deve valer para todas as trajetórias possíveis, sejam elas ou não a que de fato ocorre.

**Teorema [Noether]:**

*Seja um sistema físico de  $n$  graus de liberdade descrito por uma Lagrangeana  $L(q, \dot{q}, t)$ . Suponha que a transformação do tempo e das coordenadas dada por*

$$t \rightarrow t' = t + \epsilon X(q(t), t), \quad q_i(t) \rightarrow q_i'(t') = q_i(t) + \epsilon \Psi_i(q(t), t), \quad (1.86)$$

*onde  $\epsilon$  é um parâmetro infinitesimal é uma simetria contínua da ação. Nestas condições a quantidade*

$$C = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i X - \Psi_i) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - XL \quad (1.87)$$

*é uma constante do movimento.* □

*Demonstração:*

Por ora, notemos que  $t' - t = \epsilon X(q(t), t)$  e  $q_i'(t') - q_i(t) = \epsilon \Psi_i(q(t), t)$ . É útil denotarmos a variação na forma de  $q_i$  por  $\delta q_i(t) = q_i'(t) - q_i(t)$ .

Perceba que a variação  $\delta q_i(t)$  ocorre num instante de tempo fixo, tal como as variações que fizemos para deduzir as Equações de Euler-Lagrange, e portanto comuta com derivadas temporais.

Tem-se que

$$\begin{aligned} \epsilon \Psi_i(q(t), t) &= q_i'(t') - q_i(t), \\ &= q_i'(t') - q_i(t') + q_i(t') - q_i(t), \\ &= \delta q_i(t') + q_i(t) + \epsilon \dot{q}_i(t) X(q(t), t) - q_i(t), \\ &= \delta q_i(t') + \epsilon \dot{q}_i(t) X(q(t), t). \end{aligned} \quad (1.88)$$

A variação  $\delta q_i(t)$  já é de ordem  $\epsilon$ , como pode ser visto ao fazer  $X = 0$  (e portanto  $t' = t$ ), em que se tem  $\delta q_i(t) = \epsilon \Psi_i(q(t), t)$ . Como as variações são infinitesimais, podemos ignorar termos quadráticos em  $\epsilon$  e escrever

$$\epsilon \Psi_i(q(t), t) = \delta q_i(t) + \epsilon \dot{q}_i(t) X(q(t), t), \quad (1.89)$$

ou, por simplicidade,

$$\epsilon \Psi_i = \delta q_i(t) + \epsilon \dot{q}_i(t) X \quad (1.90)$$

Note ainda que

$$\begin{aligned}
q'_i(t') &= q_i(t) + \epsilon \Psi_i, \\
\frac{dt'}{dt} \frac{dq'_i}{dt'} &= \dot{q}_i(t) + \epsilon \dot{\Psi}_i, \\
(1 + \epsilon \dot{X}) \frac{dq'_i}{dt'} &= \dot{q}_i(t) + \epsilon \dot{\Psi}_i, \\
\frac{dq'_i}{dt'} &= (1 - \epsilon \dot{X}) (\dot{q}_i(t) + \epsilon \dot{\Psi}_i), \\
&= \dot{q}_i(t) + \epsilon (\dot{\Psi}_i - \dot{q}_i(t) \dot{X}),
\end{aligned} \tag{1.91}$$

onde desprezamos termos quadráticos em  $\epsilon$  e utilizamos o fato que  $(1 + \epsilon x)(1 - \epsilon x) = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ .

Calculemos agora os efeitos da transformação na Lagrangeana. Escrevendo  $L' = L(q'(t'), \dot{q}'(t'), t')$ , temos

$$\begin{aligned}
L' &= L(q(t) + \epsilon \Psi, \dot{q}(t) + \epsilon (\dot{\Psi} - \dot{q}(t) \dot{X}), t + \epsilon X), \\
&= L(q(t), \dot{q}(t), t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \epsilon \Psi_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon (\dot{\Psi}_i - \dot{q}_i(t) \dot{X}) + \frac{\partial L}{\partial t} \epsilon X.
\end{aligned} \tag{1.92}$$

Podemos então utilizar a Eq. (1.90) para obter

$$\begin{aligned}
L' &= L(q(t), \dot{q}(t), t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} [\delta q_i(t) + \epsilon \dot{q}_i(t) X] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\delta \dot{q}_i(t) + \epsilon \ddot{q}_i(t) X] + \epsilon \frac{\partial L}{\partial t} X, \\
&= L(q(t), \dot{q}(t), t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i(t) + \epsilon \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i(t) + \frac{\partial L}{\partial t} \right] X, \\
&= L(q(t), \dot{q}(t), t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i(t) + \epsilon \frac{dL}{dt} X, \\
&= L + \delta L + \epsilon \frac{dL}{dt} X.
\end{aligned} \tag{1.93}$$

Perceba que, como as variações  $\delta q_i(t)$  tem ordem  $\epsilon$ ,  $\delta L$  tem ordem  $\epsilon$ .

Agora que temos a Lagrangeana escrita antes e depois da transformação, devemos considerar a ação antes e depois da transformação. Isto nos leva a considerar como a integral se comporta frente à mudança de variáveis  $t \rightarrow t'$ . Temos que

$$\begin{aligned}
dt' &= \frac{dt'}{dt} dt, \\
&= (1 + \epsilon \dot{X}) dt.
\end{aligned} \tag{1.94}$$

Logo, a condição de invariância da ação sob a transformação infinitesimal se torna

(ignorando termos quadráticos em  $\epsilon$ )

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{t_1}^{t_2} \left( L + \delta L + \epsilon \frac{dL}{dt} X \right) (1 + \epsilon \dot{X}) - L dt, \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \epsilon L \dot{X} + \delta L + \epsilon \frac{dL}{dt} X dt, \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \epsilon \frac{d}{dt} (LX) + \delta L dt. \tag{1.95}
\end{aligned}$$

Para prosseguir, devemos calcular  $\delta L$ . Agora, pela primeira vez na dedução, imporemos as Equações de Euler-Lagrange. Note que

$$\begin{aligned}
\delta L &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i(t), \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i(t), \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(t) \right), \\
&= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(t) \right). \tag{1.96}
\end{aligned}$$

Utilizando novamente a Eq. (1.90) temos

$$\delta L = \epsilon \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\Psi_i - \dot{q}_i(t) X) \right). \tag{1.97}$$

Assim, a Eq. (1.95) se torna

$$0 = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( LX + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\Psi_i - \dot{q}_i(t) X) \right) dt. \tag{1.98}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, vemos que

$$\left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_i(t) X - \Psi_i) - XL \right]_{t_1}^{t_2} = 0 \tag{1.99}$$

para quaisquer dois instantes  $t_1$  e  $t_2$ . Logo, a quantidade

$$C = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_i(t) X - \Psi_i) - XL \tag{1.100}$$

é conservada ao longo do movimento. ■

Perceba que nós exigimos uma simetria valendo em todo o espaço de configurações para obter uma consequência que vale apenas para a trajetória real do movimento.

**Exercício 26:**

Utilize o Teorema de Noether para mostrar que em um sistema físico invariante sob translações temporais infinitesimais a integral de Jacobi é conservada. ✚

**Exercício 27:**

Considere uma partícula cujo movimento é descrito por uma Lagrangeana invariante sob translações espaciais infinitesimais. Mostre que o momento linear é conservado. ✚

**Exercício 28:**

Considere uma partícula cujo movimento é descrito por uma Lagrangeana invariante sob rotações infinitesimais. Mostre que o momento angular é conservado. ✚

**Exercício 29:**

Considere um sistema físico composto de muitas partículas. Assumindo que este sistema é invariante sob translações espaciais infinitesimais que ajam sobre todas as partículas da mesma maneira - *i.e.*, que o sistema seja invariante ao deslocar todas as partículas por  $\epsilon$  na mesma direção - mostre que a quantidade

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{\alpha}} \quad (1.101)$$

é conservada, onde o índice  $\alpha$  corre sobre cada uma das partículas,  $\mathbf{v}_{\alpha}$  indica a velocidade da partícula  $\alpha$  e a denotamos (em coordenadas cartesianas, por simplicidade)

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{\alpha}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha}} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{\alpha}} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_{\alpha}} \hat{\mathbf{z}}. \quad (1.102)$$

**Exercício 30:**

Utilize a conservação do momento total de um sistema físico para mostrar que, em sistemas invariantes por translação espacial, sempre é possível tomar um referencial inercial em que vale, para todo instante, que

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} = \mathbf{0}. \quad (1.103)$$

Este é o chamado referencial do centro de massa, e o ponto

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}} \quad (1.104)$$

é dito ser o centro de massa do sistema. ✚

**Exercício 31:**

Mostre que a conservação do momento total de um sistema é equivalente a afirmar que o centro de massa do sistema se move com velocidade vetorial constante em relação a qualquer referencial inercial. ✚

**Exercício 32:**

Vimos anteriormente que os elementos de  $\mathcal{G}_c$ , definido na Eq. (1.18), são descritos ao

forneceremos 10 parâmetros contínuos. Os elementos de  $\mathcal{G}$  são dados pelos elementos de  $\mathcal{G}_c$  compostos com uma inversão temporal ou uma transformação de paridade, que são simetrias discretas e portanto não satisfazem as hipóteses do Teorema de Noether: não podemos fazer uma transformação de paridade infinitesimal. As transformações descritas pelos elementos de  $\mathcal{G}_c$ , contudo, são contínuas.

Dos dez graus de liberdade de  $\mathcal{G}_c$ , exploramos as leis de conservação induzidas por sete: a única translação temporais (que induz a conservação da integral de Jacobi), as três translações espaciais (que induzem a conservação do momento linear) e as três rotações dadas pelos ângulos de Euler (que induzem a conservação do momento angular). Restam ainda os três graus de liberdade dos boosts de Galilei. Estes graus de liberdade de  $\mathcal{G}_c$  induzem quantidades conservadas? Se sim, quais? Se não, por quê? ✠

O Teorema de Noether é possivelmente o resultado mais profundo da Física contemporânea: a toda simetria corresponde uma lei de conservação. Nos exemplos que vimos em Mecânica Clássica, isto implica a conservação da energia, momento linear e momento angular a partir da estrutura de simetrias do Universo. Se nenhuma posição é preferida em relação a outra, o momento linear é conservado. Se nenhuma direção é preferida em relação à outra, o momento angular é conservado. Se nenhum instante de tempo é preferido em relação a outro, a integral de Jacobi - ou, a grosso modo, a energia - é conservada.

Isto nos permite obter uma intuição profunda sobre quais quantidades serão conservadas em um sistema. Considere um pêndulo oscilando sem atrito, por exemplo. Se o observarmos agora ou daqui a um intervalo de tempo  $\epsilon$ , seu comportamento ainda será o mesmo, por mais que a posição específica possa ser diferente. A amplitude ainda é a mesma, a relação satisfeita entre posição e velocidade ainda é a mesma e, de modo mais profundo, a energia é a mesma. Um pêndulo com atrito não é invariante sob translações temporais: a amplitude do sistema diminui com o passar do tempo.

De modo semelhante, consideremos uma partícula em queda livre. As posições mais próximas ao chão são preferidas em relação a posições mais altas, e portanto o momento linear não é conservado na direção de queda. Contudo, o sistema não percebe diferença entre os diferentes pontos de queda: translações espaciais perpendiculares à direção de queda ainda são simetrias do sistema, e portanto o momento linear é conservado nestas direções.

Em outras áreas da Física, como em Teorias de Campos (tanto clássicas quanto quânticas), o Teorema de Noether possui implicações ainda mais surpreendentes. Ele assume uma forma distinta e mais elegante que a que vimos, e permite obter resultados como a conservação da carga elétrica, que nada mais é do que a carga de Noether conservada pela chamada invariância de gauge da Eletrodinâmica.

Em Eletrodinâmica, os campos elétrico,  $\mathbf{E}$ , e magnético,  $\mathbf{B}$ , podem ser calculados a partir dos chamados potenciais escalar e vetorial, denotados aqui por  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$ , por meio das

expressões

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \end{cases}$$

**Exercício 33:**

Mostre que os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  permanecem inalterados sob a transformação

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi + \frac{\partial\lambda}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\lambda \quad (1.105)$$

para toda função  $\lambda$  dependendo das coordenadas espaciais e do tempo. ✠

Estas transformações, conhecidas como transformações de gauge ou transformações de calibre, constituem simetrias da ação da Eletrodinâmica Quântica e induzem, pelo Teorema de Noether, uma quantidade conservada, que é precisamente a carga elétrica.

**1.A Exercícios Complementares**

**Exercício 34** [Invariância das Equações de Euler-Lagrange Sob Mudanças de Coordenadas]:

Considere um sistema físico descrito por uma Lagrangeana  $L(q, \dot{q}, t)$ . As equações de Euler-Lagrange são dadas por

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0. \quad (1.106)$$

Considere a transformação de coordenadas para um sistema de coordenadas generalizadas  $Q_j = Q_j(q_i, t)$ , suposta inversível. Mostre que as equações de Euler-Lagrange ainda são válidas, *i.e.*, mostre que

$$\frac{\partial L}{\partial Q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} \right) = 0. \quad (1.107) \quad \text{✠}$$

**Exercício 35** [Lagrangeanas de Ordens Superiores e Relatividade Geral]:

Até agora nós analisamos o caso em que a Lagrangeana descrevendo um certo sistema depende apenas das coordenadas generalizadas, das velocidades generalizadas e do tempo. Contudo, a princípio poderíamos considerar Lagrangeanas mais gerais, dependendo, por exemplo, nas segundas derivadas das coordenadas.

Suponhamos que um certo sistema é descrito então por uma Lagrangeana da forma  $L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$ . Obtenha a nova forma das Equações de Euler-Lagrange. Qual a ordem das equações de movimento? Quais novas hipóteses precisaram ser feitas?

Tomemos agora uma forma particular desta classe de Lagrangeanas generalizadas. Suponha uma Lagrangeana  $L$  dada por

$$L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = L_1(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} L_2(q, \dot{q}, t). \quad (1.108)$$

Quais são as equações de Euler-Lagrange neste caso? Qual a ordem das equações de movimento? Quantas condições de fronteira estão sendo especificadas no princípio variacional?

Na Relatividade Geral, as Equações de Campo de Einstein – que descrevem como o espaço-tempo é curvado pela presença de energia e matéria – são as equações de Euler-Lagrange geradas pela ação

$$S_{\text{E-H}} = \int R \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.109)$$

conhecida como ação de Einstein-Hilbert.  $R$ , conhecido como escalar de Ricci, é uma função dependente da métrica  $g$  – que descreve a curvatura do espaço-tempo – e de suas primeiras e segundas derivadas. Logo, esperar-se-ia que as Equações de Campo de Einstein não fossem de segunda ordem. Contudo, a Lagrangeana associada à ação de Einstein-Hilbert tem forma semelhante à da Eq. (1.108), e portanto podemos remover a dependência nas segundas derivadas ao incluir um termo de fronteira[28, 40], que não afeta as equações de movimento. Toma-se como condições de contorno apenas as condições sobre o campo  $g$  (análogo às coordenadas  $q$  que estamos estudando em Mecânica Clássica). ❌

**Exercício 36** [Princípio de Fermat]:

O Princípio de Fermat na Óptica Geométrica afirma que um raio de luz conectando dois pontos  $O$  e  $P$  sempre se move de modo que o funcional

$$T = c \int_O^P dt \quad (1.110)$$

seja minimizado, onde  $t$  denota o tempo levado para percorrer o trajeto e  $c$  denota a velocidade da luz no vácuo. Sabendo que o índice de refração de um material é dado por  $n = \frac{c}{v}$ , deduza a Lei de Snell-Descartes para a refração de um raio incidindo obliquamente na interface de dois meios com índices de refração distintos:

$$n_i \sin \theta_i = n_r \sin \theta_r, \quad (1.111)$$

onde  $n_i$  denota o índice de refração do meio do raio incidente,  $n_r$  o índice de refração do meio raio refratado,  $\theta_i$  o ângulo de incidência e  $\theta_r$  o ângulo de refração (ver Figura 5).

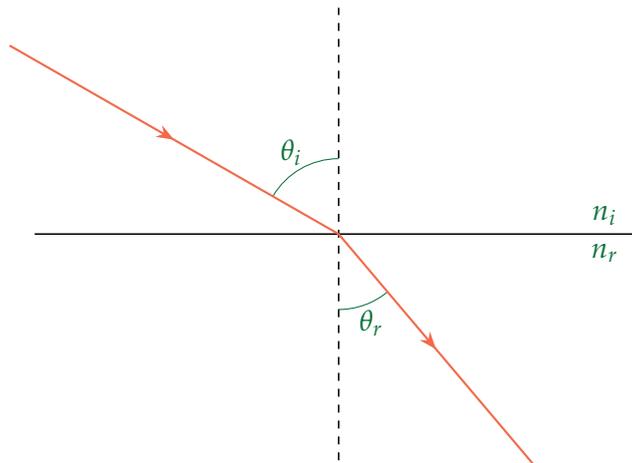
O exercício é simplificado ao *não* utilizar as Equações de Euler-Lagrange. ❌

\* **Exercício 37** [Modos Normais - Teoria]:

Dada uma função suficientemente diferenciável  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e um ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , é possível escrevê-la como[31]

$$V(x + x_0) = V(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x_0) \cdot x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \cdot x_i x_j + \mathcal{O}(x^3), \quad (1.112)$$

onde o símbolo  $\mathcal{O}(x^3)$  significa que os demais termos dependem das coordenadas  $x_i$  por meio de polinômios de grau 3 ou superior.



**Figura 5.** Refração em meios materiais.

Este é um caso especial da fórmula de Taylor para funções reais com argumentos em  $\mathbb{R}^n$ .

Suponhamos que um sistema com  $n$  graus de liberdade seja descrito por um potencial  $V$  que tenha um ponto de mínimo local na configuração  $q_0$ . Escolhamos um sistema de coordenadas generalizadas em que  $q_0 = 0 = (0, \dots, 0)$ , por simplicidade. Podemos, sem perda de generalidade, assumir que  $V(0) = 0$  por simplicidade. Como  $0$  é um ponto de mínimo local, temos que  $\frac{\partial V}{\partial q_i}(0) = 0$ .

Suponhamos ainda que movimento ocorra de modo que as partículas se desloquem muito pouco da configuração de equilíbrio  $0$ , de modo que possamos escrever

$$\begin{aligned} V(x) &\approx V(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_i}(0) \cdot q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}(0) \cdot q_i q_j, \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}(0) \cdot q_i q_j. \end{aligned} \quad (1.113)$$

Denotando  $k_{ij} \equiv 2 \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}(0)$ , temos que

$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} q_i q_j. \quad (1.114)$$

A constante  $\frac{1}{2}$  foi inserida por conveniência.

A energia cinética tem a forma dada na Eq. (1.37):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (1.115)$$

Como os deslocamentos  $q_i$  são pequenos, as velocidades  $\dot{q}_i$  também precisam ser.

Podemos utilizar a fórmula de Taylor mais uma vez para expandir  $a_{ij}(q)$  em um polinômio de várias variáveis na forma

$$a_{ij}(q) = a_{ij}(0) + \mathcal{O}(q), \quad (1.116)$$

onde mais uma vez o símbolo  $\mathcal{O}(q)$  indica que os demais termos são proporcionais a  $q$  ou a potências maiores de  $q$ .

Contudo, como  $a_{ij}(q)$  ocorre multiplicado por  $\dot{q}_i\dot{q}_j$ , devemos considerar a expansão

$$a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j = a_{ij}(0)\dot{q}_i\dot{q}_j + \mathcal{O}(q^3). \quad (1.117)$$

Como descartamos termos do potencial proporcionais a  $q^3$  ou potências maiores por serem muito pequenos, também os devemos descartar aqui. Assim, a energia cinética é dada aproximadamente por

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(0)\dot{q}_i\dot{q}_j. \quad (1.118)$$

Se denotarmos  $m_{ij} \equiv a_{ij}(0)$ , obtemos

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j. \quad (1.119)$$

Assim, a Lagrangeana do sistema é

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} [m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - k_{ij}q_iq_j], \quad (1.120)$$

onde as matrizes\*  $m_{ij}$  e  $k_{ij}$  são simétricas.

Mostre que as equações de movimento são

$$\sum_j m_{ij}\ddot{q}_j + k_{ij}q_j = 0. \quad (1.121)$$

Em analogia ao oscilador harmônico simples† substitua o ansatz

$$\tilde{q}_j(t) = A_j e^{i\omega t}, \quad (1.122)$$

para coeficientes  $A_j \in \mathbb{C}$ , para resolver o sistema de equações diferenciais acopladas e obtenha que

$$\sum_j [-\omega^2 m_{ij} + k_{ij}] A_j = 0. \quad (1.123)$$

Podemos escrever este sistema de equações algébricas em formato matricial ao introduzir as matrizes  $\mathbb{M}$  e  $\mathbb{K}$  com entradas  $\mathbb{M}_{ij} = m_{ij}$ ,  $\mathbb{K}_{ij} = k_{ij}$  e o vetor  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_n)^\top$ . Temos então

$$(-\omega^2 \mathbb{M} + \mathbb{K}) \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (1.124)$$

---

\*Se você não percebe o porquê de podermos pensar em  $m_{ij}$  e  $k_{ij}$  como matrizes, confira os Exercícios 8 e 9 e compare os resultados com as Eqs. (1.37) e (1.39).

†Ver Apêndice A.

Utilize o Exercício 10 para concluir que existe uma matriz  $\mathbf{O}$  com

$$\mathbf{O}\mathbf{A} = \omega^2\mathbf{A}. \quad (1.125)$$

Expresse  $\mathbf{O}$  em termos de  $\mathbb{M}$  e  $\mathbb{K}$ .

Reduzimos o problema a analisar quais vetores  $\mathbf{A}$  e quais valores  $\omega^2$  são tais que a equação Eq. (1.125) é satisfeita. Este problema é conhecido na Álgebra Linear como um problema de autovalores\*.

Mostre que se a matriz  $\mathbf{O} - \omega^2\mathbb{1}$  for inversível, então a única solução para a Eq. (1.125) é  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ .

Esta solução não é interessante, pois corresponde às partículas permanecerem em repouso. Logo, estamos interessados no caso  $\det(\mathbf{O} - \omega^2\mathbb{1}) = 0$ , visto que uma matriz é inversível se, e somente se, seu determinante é não-nulo.

Perceba que a equação  $\det(\mathbf{O} - \omega^2\mathbb{1}) = 0$  é uma equação polinomial de grau  $n$  para  $\omega^2$ . Mostre que esta equação não pode admitir soluções com  $\omega^2 < 0$ . Sugestão: utilize o fato de que a Lagrangeana não depende explicitamente do tempo.

As quantidades positivas  $\omega_s, 1 \leq s \leq n$ , obtidas dessa maneira são conhecidas como frequências características, ou autofrequências†, do sistema. Note que é possível que haja degenerescência, *i.e.*, é possível que  $\omega_s = \omega_r$  para  $s \neq r$ .

É possível obter  $n$  vetores linearmente independentes  $\mathbf{A}^{(s)}, 1 \leq s \leq n$ , tais que

$$\sum_j [-\omega_s^2 m_{ij} + k_{ij}] A_j^{(s)} = 0. \quad (1.126)$$

Como as matrizes  $\mathbb{M}$  e  $\mathbb{K}$  são reais, é possível sempre tomar os vetores  $\mathbf{A}^{(s)}$  como sendo reais. Substituindo estes vetores em nosso ansatz da Eq. (1.122) temos que

$$\tilde{q}_j^{(s)}(t) = A_j^{(s)} e^{i\omega_s t} \quad (1.127)$$

solucionam as equações de movimento dispostas na Eq. (1.121). Estas soluções são os chamados modos normais de vibração do sistema.

Como a Eq. (1.121) é uma equação diferencial linear, combinações de lineares de soluções são soluções. Portanto, a solução complexa mais geral é dada por combinações lineares dos modos normais:

$$\tilde{q}_j(t) = \sum_{s=1}^n \alpha^{(s)} A_j^{(s)} e^{i\omega_s t}, \quad (1.128)$$

onde os coeficientes  $\alpha^{(s)}$  são complexos. Por simplicidade, podemos escrevê-los em forma polar:  $\alpha^{(s)} = C^{(s)} e^{i\varphi_s}$ , com  $C^{(s)}$  e  $\varphi_s$  reais. Assim,

$$\tilde{q}_j(t) = \sum_{s=1}^n C^{(s)} A_j^{(s)} e^{i(\omega_s t + \varphi_s)}. \quad (1.129)$$

---

\*Em inglês, *eigenvalue problem*.

†Em inglês, *eigenfrequencies*.

Nós transportamos o problema para o plano complexo como meio de simplificar as contas, mas estamos interessados em movimentos ocorrendo com valores reais. Assim, estamos interessados nas quantidades  $q_j(t) \equiv \text{Re}[\tilde{q}_j(t)]$ . Isto nos fornece

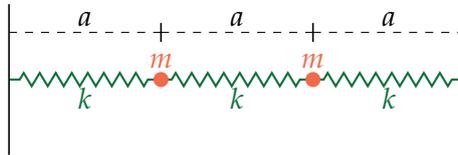
$$q_j(t) = \sum_{s=1}^n C^{(s)} A_j^{(s)} \cos(\omega_s t + \varphi_s), \quad (1.130)$$

que é a solução geral para o problema. Note que a solução depende de  $2n$  constantes que não foram fixadas,  $C^{(s)}$  e  $\varphi_s$ . Estas devem ser determinadas pelas condições iniciais. ✚

**Exercício 38** [Modos Normais - Aplicação]:

Este exercício assume familiaridade com o que foi desenvolvido no Exercício 37.

Considere o problema de dois corpos idênticos com massa  $m$  ligados a duas paredes por molas de constante elástica  $k$  com comprimento relaxado  $a$ , como representado na Figura 6.



**Figura 6.** Dois corpos idênticos com massa  $m$  ligados a duas paredes por molas de constante elástica  $k$  com comprimento relaxado  $a$ .

Suponhamos, por simplicidade, que as massas não podem se mover verticalmente. Escolha um sistema de coordenadas generalizadas. Obtenha a Lagrangeana do sistema e estude o comportamento do sistema sob pequenas oscilações longitudinais, *i.e.*, obtenha as autofrequências, os modos normais de vibração e as soluções gerais do movimento. Interprete fisicamente os modos normais de vibração. ✚

**Exercício 39** [Modos Normais - Aplicação]:

Este exercício assume familiaridade com o que foi desenvolvido no Exercício 37.

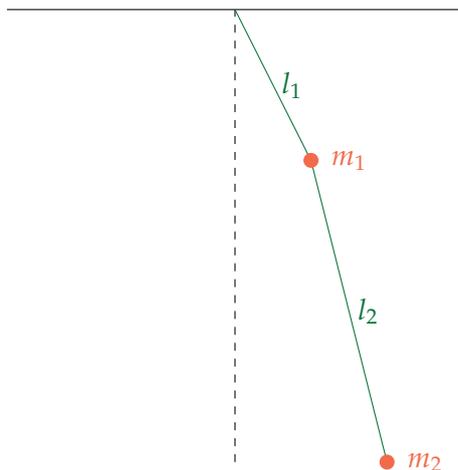
Considere o problema de um pêndulo duplo: dois corpos com massas  $m_1$  e  $m_2$ , sendo que o corpo de massa  $m_1$  é ligado por meio de uma haste rígida de comprimento  $l_1$  a um suporte e o corpo de massa  $m_2$  é ligado ao corpo de massa  $m_1$  por meio de uma haste rígida de comprimento  $l_2$ . Isto está esquematizado na Figura 7.

Suponhamos, por simplicidade, que o movimento das massas está restrito a um único plano, *i.e.*, elas não podem sair do papel no desenho da Figura 7. Escolha um sistema de coordenadas generalizadas. Obtenha a Lagrangeana do sistema e as suas autofrequências. ✚

## 2 Mecânica Hamiltoniana

### 2.1 Equações Canônicas

A existência de quantidades conservadas em certos problemas de Mecânica indica que em alguns contextos seria mais interessante descrever um problema em termos de mo-



**Figura 7.** Um pêndulo duplo.

mentos generalizados do que em termos de velocidades generalizadas. Se o momento em consideração é conservado, sua evolução se torna trivial e as equações são simplificadas.

A formulação Lagrangeana se dá em termos de uma função  $L(q, \dot{q}, t)$ , e queremos agora obter uma nova função  $H(q, p, t)$ , onde  $p_i$  é o momento canonicamente conjugado à coordenada  $q_i$ . Para descobrirmos como obter tal função  $H$  é útil observarmos como  $L$  depende de  $q$  e  $\dot{q}$ . Temos

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.1)$$

Utilizando a definição de momento canonicamente conjugado e as equações de Euler-Lagrange, temos que

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.2)$$

Para remover a dependência em  $\dot{q}_i$  e substituí-la por uma dependência em  $p_i$  podemos utilizar a regra da cadeia para escrever

$$p_i d\dot{q}_i = d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i \quad (2.3)$$

e concluir que

$$d\left(L - \sum_i p_i \dot{q}_i\right) = \sum_i \dot{p}_i dq_i - \sum_i \dot{q}_i dp_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.4)$$

Logo, a função  $L - \sum_i p_i \dot{q}_i$  substitui a dependência da Lagrangeana nas velocidades generalizadas por dependência nos momentos generalizados. Comparando esta expressão com as Eqs. (1.70) e (1.81), vemos que definir

$$H(q, p, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (2.5)$$

nos permite obter uma expressão que substitui a dependência nas velocidades por dependência nos momentos e recupera a noção convencional de energia em certos casos particulares. A função  $H$  assim definida é chamada de Hamiltoniana do sistema.

Note que existe uma diferença entre a integral de Jacobi,  $h$ , e a Hamiltoniana  $H$ : a integral de Jacobi é função das velocidades, enquanto a Hamiltoniana é função dos momentos.

**Exercício 40:**

Considere uma partícula de massa  $m$  se movendo sob a ação de um potencial  $V(q, t)$ . Obtenha a Hamiltoniana do sistema em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas.



Das Eqs. (2.4) e (2.5) vemos que

$$dH = - \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (2.6)$$

donde seguem as chamadas equações canônicas de Hamilton

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = +\dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.7)$$

**Exercício 41:**

Seja  $H(q, p, t)$  a Hamiltoniana de um sistema físico. Utilize as equações canônicas para mostrar que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (2.8)$$



**\* Exercício 42:**

Mostre que o Princípio de Hamilton e as equações canônicas de Hamilton são equivalentes. Para fazer isto, é útil reescrever a Lagrangeana em termos da Hamiltoniana na expressão da ação.



Esta transformação que substitui uma função  $L$  que depende de  $\dot{q}_i$  por uma nova função  $H$  que depende de  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  com  $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$  é conhecido com transformação de Legendre, e ocorre em outras áreas da Física além da Mecânica Clássica.

**Exercício 43:**

Na Termodinâmica, a energia interna  $U$  de um gás com número de partículas constante está relacionada a sua temperatura  $T$ , entropia\*  $S$ , pressão  $p$  e volume  $V$  por meio da expressão

$$dU = T dS - p dV. \quad (2.9)$$

Note que a energia interna é função da entropia e do volume do gás:  $U = U(S, V)$ .

---

\*A entropia pode ser interpretada, a grosso modo, como uma medida da desorganização do sistema, mas isso não é realmente relevante para este problema.

Experimentalmente, não é simples medir a entropia do sistema, mas é muito mais simples medir sua temperatura. Por isso, é útil fazer uma transformação de Legendre para obter a energia livre de Helmholtz,  $F$ , que satisfaz

$$dF = -S dT - p dV. \quad (2.10)$$

O estudo de outros processos pode ser simplificado ao considerar a pressão  $p$  como variável no lugar do volume  $V$ . Processos que ocorrem a pressão constante, como processos que ocorrem à pressão atmosférica, terão um tratamento simplificado. Assim, introduz-se a entalpia  $H$ , que satisfaz

$$dH = T dS + V dp. \quad (2.11)$$

Por fim, podemos ainda nos interessar em ter como variáveis a pressão  $p$  e a temperatura  $T$ . Isso motiva a definição da energia livre de Gibbs,  $G$ , que satisfaz

$$dG = -S dT + V dp. \quad (2.12)$$

Obtenha as expressões para  $F$ ,  $H$  e  $G$  em termos de  $U$ ,  $T$ ,  $S$ ,  $p$  e  $V$ . ✠

## 2.2 Espaço de Fases

A formulação das equações de movimento na forma das equações nos permite explorar um novo maquinário para a solução de problemas mecânicos: o espaço de fases.

O espaço de configurações descreve apenas as posições do sistema. O espaço de fases, por outro lado, é formado pelas  $2n$ -uplas  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ , e cada ponto do espaço descreve completamente um estado do sistema físico. Se conhecermos a posição e momento de todas as partículas do sistema num dado instante, somos capazes de prever sua evolução utilizando as equações canônicas.

Por simplicidade, consideremos um sistema com apenas um grau de liberdade: o pêndulo simples.

### Exercício 44:

Mostre que a Hamiltoniana do pêndulo simples de comprimento  $l$  e massa  $m$  é

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos q, \quad (2.13)$$

onde  $q$  é o ângulo que o pêndulo faz com a vertical e  $p$  é o momento canonicamente conjugado a  $q$ . Obtenha as equações de movimento. ✠

Faremos a discussão de modo geral, recorrendo ao pêndulo simples quando desejarmos visualizar exemplos mais concretos.

As equações canônicas nos informam que

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \\ \dot{q} = +\frac{\partial H}{\partial p}. \end{cases}$$

Isto nos sugere utilizar o método de Euler, como feito no Apêndice A. O deduziremos novamente aqui, dado que o contexto é mais amplo.

Sabemos que dada uma função  $f(t)$ , podemos aproximá-la por uma reta por meio da expressão

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \mathcal{O}((t - t_0)^2). \quad (2.14)$$

Utilizando esta expressão em conjunto com as equações canônicas, obtemos

$$\begin{cases} p(t) = p(t_0) - \frac{\partial H}{\partial q}(q(t_0), p(t_0), t_0)(t - t_0) + \mathcal{O}((t - t_0)^2), \\ q(t) = q(t_0) + \frac{\partial H}{\partial p}(q(t_0), p(t_0), t_0)(t - t_0) + \mathcal{O}((t - t_0)^2). \end{cases}$$

Assim, utilizando as informações que temos em  $t_0$  podemos obter a posição e momento em  $t$  com erro proporcional a  $\Delta t = t - t_0$ . Podemos iterar o procedimento para obter uma solução numérica do sistema de equações diferenciais. Assim, temos

$$\begin{cases} p(t_{n+1}) = p(t_n) - \frac{\partial H}{\partial q}(q(t_n), p(t_n), t_n)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2), \\ q(t_{n+1}) = q(t_n) + \frac{\partial H}{\partial p}(q(t_n), p(t_n), t_n)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2). \end{cases}$$

Para o pêndulo simples, temos

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{ml^2}, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = mgl \sin q. \quad (2.15)$$

Podemos então usar estas expressões para implementar o método de Euler numericamente e obter a solução para o movimento do pêndulo simples. Desta vez, é mais interessante que utilizemos diversas condições iniciais a fim de sondar o espaço de fases. A estrutura qualitativa de todas as trajetórias possíveis no espaço de fase é chamada de retrato de fase.

Por simplicidade, tomemos unidades em que  $m = g = l = 1^*$  e tomemos condições iniciais variadas com  $q = 0$  e diversos valores de  $p$  entre  $-3$  e  $3$ . Usaremos o passo  $\Delta t = 0.0001$ . Uma implementação desta simulação em Python está disponibilizada no Subapêndice B.2, e o retrato de fase gerado está na Figura 8.

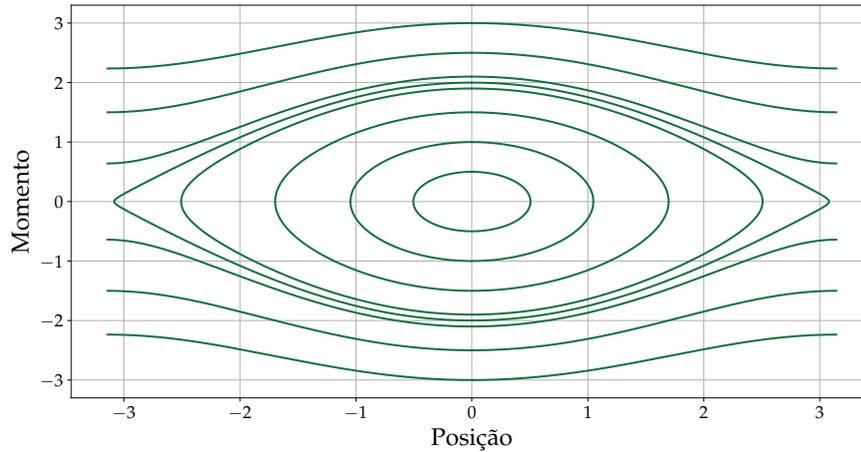
É natural perguntar-se se podemos obter um esboço da Figura 8 sem recorrer a métodos numéricos. A resposta é: sim, é possível.

A Hamiltoniana  $H$  define um sistema dinâmico no espaço de fases. Ou seja, ela determina a evolução temporal dos pontos no espaço de fases. São particularmente interessantes os chamados pontos fixos do sistema dinâmico: aqueles cuja evolução consiste em se manter parado.

Considere a origem na Figura 8, por exemplo. Ela corresponde ao estado de um pêndulo formando ângulo  $q = 0$  com a vertical e momento  $p = 0$ . Naturalmente, o

---

\*Caso esta frase lhe cause desconforto, veja a Subsubseção 2.2.1.



**Figura 8.** Retrato de fase para o movimento do pêndulo simples em unidades com  $m = g = l = 1$  e passo  $\Delta t = 0.0001$ . O código em Python utilizado para gerar o gráfico está disponibilizado no Subapêndice B.2.

pêndulo não começará a se mover espontaneamente, e o retrato de fase reflete esse fato. Este ponto demonstra ser especial, em certo sentido: os pontos ao seu redor se movem em elipses que orbitam a origem.

Comecemos então estudando quais são estes pontos fixos. Queremos analisar os pontos em que  $\dot{q} = 0$  e  $\dot{p} = 0$ , dado que estas são as condições suficientes e necessárias para que o ponto permaneça parado no espaço de fases. Para o pêndulo simples, as equações canônicas nos dizem que

$$\begin{cases} \dot{p} = 0, \\ \dot{q} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin q = 0, \\ p = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

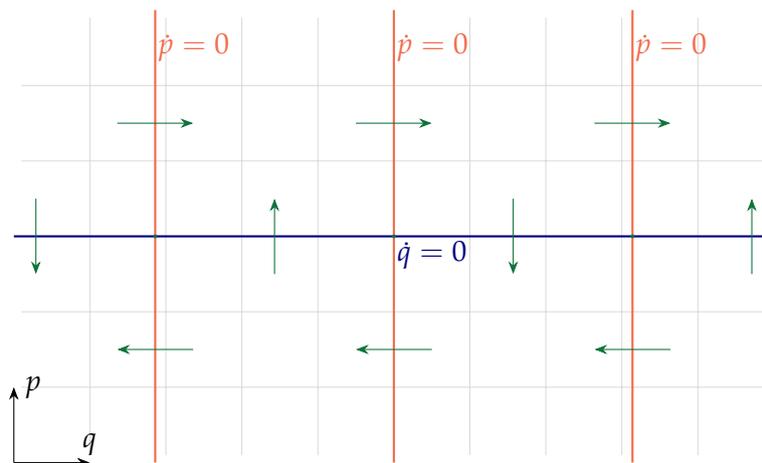
As curvas com  $\sin q = 0$  estão ilustradas em laranja na Figura 9, enquanto a curva com  $p = 0$  está ilustrada em azul. Note que os pontos fixos são suas intersecções:  $(q, p) = (0, 0)$  e  $(q, p) = (\pm\pi, 0)$ . Note que  $q = +\pi$  e  $q = -\pi$  representam o mesmo ponto físico.

Para analisar o caminho no espaço de fases, podemos considerar como se movem os pontos que estão sobre as curvas de derivadas nulas\*.

Considere por exemplo a curva  $q = 0$ , que tem  $\sin q = 0$  e portanto  $\dot{p} = 0$ . Tendo  $\dot{p} = 0$ , sabemos que um ponto sobre essa curva se moverá apenas na horizontal num instante de tempo pequeno - por exemplo, ao calcularmos seu movimento utilizando o método de Euler. O movimento na horizontal é descrito pela outra equação:  $\dot{q} = p$ . Assim, vemos que se o ponto tiver  $p > 0$  ele se move para a direita. Se tiver  $p < 0$ , se move para a esquerda. Isto está ilustrado na Figura 9 pelas setas verdes. A análise funciona de maneira idêntica para as curvas  $q = \pm\pi$ .

---

\*Em inglês, estas curvas são chamadas de *nullclines*, mas não conheço uma tradução do termo para português. Por isso, as chamarei de curvas de derivadas nulas.



**Figura 9.** Esboço das curvas de derivadas nulas no espaço de fases para o movimento do pêndulo simples em unidades com  $m = g = l = 1$ .

Resta analisarmos a curva  $p = 0$ , que tem  $\dot{q} = 0$ , e portanto o movimento de seus pontos ocorre exclusivamente na vertical. Como  $\dot{p} = -\sin q$ , vemos que para  $0 < q < \pi$  o ponto se move para baixo, e para  $-\pi < q < 0$  o ponto se move para cima. Isto também está ilustrado na Figura 9 com o auxílio de setas verdes.

O fluxo qualitativo no espaço de fases pode então ser determinado a partir das setas verdes. Vemos que na vizinhança da origem os pontos tendem a rotacionar no sentido horário. Na vizinhança do ponto  $(\pi, 0)$ , tem-se que os pontos com  $q > \pi$  e  $p > 0$  ou  $q < \pi$  e  $p < 0$  distanciam-se do ponto fixo, enquanto os pontos com  $q > \pi$  e  $p < 0$  ou  $q < \pi$  e  $p > 0$  aproximam-se do ponto fixo.

Esta é uma análise incompleta. Por exemplo, seria possível que os pontos ao redor da origem espiralasse para mais perto ou para mais longe da origem, e não fomos capazes de prever isso com as curvas de derivadas nulas. Este tipo de análise também é possível, mas envolve algumas técnicas de Álgebra Linear. Aos interessados, recomendo as referências [45, 50].

### 2.2.1 Unidades Naturais

Alguns leitores podem ter estranhado uma frase que utilizamos na página 40: “tomemos unidades em que  $m = g = l = 1$ ”.

Escolher unidades de modo a simplificar constantes é uma prática extremamente comum em Física. A escolha de unidades é direito do físico, dado que nada diz acerca da natureza em si. No Sistema Internacional, pode ser que fôssemos ter  $m = 0.739 \text{ kg}$ ,  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$  e  $l = 0.322 \text{ m}$ . A princípio, não precisamos nos preocupar com os números, pois podemos mantê-los ocultos atrás de variáveis,  $m$ ,  $g$  e  $l$ . Contudo, ainda somos forçados a carregar estas variáveis.

Façamos pois o seguinte: ao invés de fazer as contas num sistema de unidades qualquer, escolhemos um particular que seja conveniente. Definimos que o comprimento  $l$  vale exatamente 1 (adimensional), e de maneira análoga para  $m$  e  $g$ . Impor  $l = 1$  significa

que estamos tomando todos os comprimentos como sendo adimensionais.  $m = 1$  toma as massas como adimensionais.  $g = 1$  impõe que dimensões de tempo ao quadrado são iguais a dimensões de comprimento. Como o comprimento agora é adimensional, o tempo também passou a ser.

Esta estranha convenção elimina todas as constantes das expressões. A Hamiltoniana do pêndulo, por exemplo, se torna simplesmente

$$H = \frac{p^2}{2} - \cos q, \quad (2.17)$$

que é muito mais simples de se ler.

A preocupação natural que surge é: como podemos obter o resultado num sistema de unidades arbitrário? Estamos confinados a utilizar este sistema artificial?

Não! Podemos obter novamente as expressões com  $m, g, l$  por meio de análise dimensional!

#### Exercício 45:

Considere a Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2} - \cos q. \quad (2.18)$$

Sabemos que uma Hamiltoniana precisa ter dimensões de energia, *i.e.*,  $[H] = ML^2T^{-2}$ , onde  $M$  denota dimensão de massa,  $L$  dimensão de comprimento e  $T$  dimensão de tempo. Como se trata da Hamiltoniana de um pêndulo, sabemos que  $q$  é um ângulo. Utilize as equações de Hamilton para obter a dimensão de  $p$ . Utilize análise dimensional para obter qual a combinação de coeficientes  $m, g, l$  deve multiplicar  $p^2$  para obter um termo com unidades de energia. a combinação de coeficientes  $m, g, l$  deve multiplicar  $\cos q$  para obter um termo com unidades de energia. ✖

Note que este processo só foi possível porque as constantes que escolhemos fixar o permitiam. Se o problema ainda dependesse de uma quarta constante  $v$  com dimensões de velocidade, não a poderíamos fixar, pois já teríamos utilizado todas as dimensões disponíveis. Uma velocidade é composta de dimensões de comprimento e tempo, e ao impor  $g = 1$  e  $l = 1$  já fixados as unidades de comprimento e tempo.

Isso pode ser tornado mais claro ao exemplificarmos.

Em Eletromagnetismo, lida-se frequentemente com a permissividade elétrica do vácuo,  $\epsilon_0$ . Ela ocorre na Lei de Coulomb que dita a força de atração entre duas cargas elétricas:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.19)$$

Seu valor no Sistema Internacional de Unidades é aproximadamente  $\epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ , o que é uma medida de quanto o campo elétrico é capaz de permear o vácuo. Em termos de unidades base do SI,  $1 \text{ F} = 1 \text{ s}^4 \text{ A}^2 \text{ m}^{-2} \text{ kg}^{-1}$ . Outra constante relevante é a carga do elétron  $e$ , cujo valor aproximado é  $e \approx 1.602 \times 10^{-19} \text{ A s}$ .

Como  $\epsilon_0$  ocorre em essencialmente todas as expressões envolvendo Eletromagnetismo, é relativamente comum tomar unidades com  $\epsilon_0 = 1$ . Esta convenção faz parte das chamadas unidades de Heaviside-Lorentz\*. Devido ao fator de  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  na Lei de Coulomb, alguns físicos preferem tomar  $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$ , que remove o fator de  $4\pi$  da Lei de Coulomb, mas insere um fator nas Leis de Maxwell – as equações fundamentais do Eletromagnetismo. Esta prescrição faz parte das chamadas unidades Gaussianas.

Note que impor  $\epsilon_0 = 1$  ou  $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$  fixa a unidade de corrente elétrica (ou carga elétrica, dado que corrente é carga por unidade de tempo) e passa a expressar dimensões de carga em termos de dimensões de massa, comprimento, e tempo.

#### Exercício 46:

Mostre que ao tomar  $\epsilon_0 = 1$  a carga do elétron se escreve como

$$e = 5.384 \times 10^{-14} \text{ m}^{3/2} \text{ kg}^{1/2} \text{ s}^{-1}. \quad (2.20)$$



Uma constante fundamental que ocorre na Mecânica Quântica é  $\hbar$  (lê-se *h* barra, ou *h* cortado). Seu valor é aproximadamente  $\hbar \approx 1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$ . Note que  $\hbar$  tem unidades de momento angular, que coincidem com as unidades de ação, que coincidem com as unidades de área no espaço de fase para um sistema com um grau de liberdade. Todas estas são formas úteis de interpretar  $\hbar$ . Os valores que o momento angular pode assumir em sistemas quânticos são sempre múltiplos inteiros ou semi-inteiros de  $\hbar$ . Além disso, sistemas cuja ação  $S$  é tal que  $S \gg \hbar$  deixam de apresentar efeitos quânticos. Por fim,  $\hbar$  pode ser entendido como uma medida da granularidade do espaço de fases devida a efeitos quânticos.

Em Relatividade Restrita, uma constante fundamental importantíssima é a velocidade da luz do vácuo,  $c$ , que vale aproximadamente  $c \approx 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ . Esta é a velocidade limite de propagação de informação no Universo e, como consequência, não é possível que qualquer corpo massivo viaje em velocidade maior ou igual à da luz, e partículas sem massa sempre viajam na velocidade da luz†.

Em diversas Teorias Quânticas de Campos – como por exemplo o Modelo Padrão da Física de Partículas – une-se a Mecânica Quântica à Relatividade Restrita‡ e tanto  $\hbar$  quando  $c$  passam a ser constantes relevantes. Como essencialmente todas as equações passam a envolver  $c$  e  $\hbar$ , é incrivelmente conveniente tomarmos unidades em que  $\hbar = c = 1$ . Em teorias que englobam o Eletromagnetismo, como a Eletrodinâmica Quântica, segue sendo comum a prescrição  $\epsilon_0 = 1$ .

---

\*As unidades de Heaviside-Lorentz também redefinem as unidades do campo magnético para que tenha a mesma dimensão que o campo elétrico, o que não ocorre no SI.

†É possível estender a teoria para abarcar os chamados táquions, que são partículas hipotéticas que viajariam sempre em velocidade superlumínica, mas não entraremos nestes assuntos aqui por falta de conhecimento do autor.

‡Relatividade Restrita, não Relatividade Geral. Unir Mecânica Quântica e Relatividade Geral de maneira consistente e para energias arbitrariamente altas é possivelmente o maior problema em aberto na Física Teórica.

### Exercício 47:

Mostre que a quantidade

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c}, \quad (2.21)$$

conhecida como constante de estrutura fina, é adimensional, e portanto independe do sistema de unidades\*.

O valor de  $\alpha$  é aproximadamente  $\alpha \approx \frac{1}{137}$ , e  $\alpha$  ocorre, por exemplo, em cálculos envolvendo os níveis de energia da estrutura fina do átomo de hidrogênio.

Partindo do SI e tomando unidades com  $\epsilon_0 = \hbar = c = 1$ , vemos que

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \quad (2.22)$$

Assim, não podemos continuar o processo e tomar  $e = 1$ :  $e$  é incapaz de fixar novas dimensões.  $\hbar = 1$  fixa unidades de energia como sendo inversas às unidades de tempo.  $c = 1$  fixa unidades de comprimento como sendo iguais às de tempo e, como consequência, unidades de massa como sendo iguais às de energia.  $\epsilon_0 = 1$ , como vimos, fixa a unidade de carga elétrica em termos de unidades mecânicas. Ao tomar todas estas prescrições, fixamos as relações entre todas as unidades na expressão de  $e$  e ocorre um cancelamento que torna  $e$  adimensional, nos impedindo de fixá-lo.

A convenção  $\epsilon_0 = \hbar = c = 1$  é preferida dos físicos de partículas, e permite que todas as unidades mecânicas e eletromagnéticas sejam expressas em elétrons-volt – a energia que um elétron ganha ao atravessar uma diferença de potencial de um Volt. Em números,  $1 \text{ eV} \approx 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$ . Assim, a massa do elétron é aproximadamente  $m_e \approx 511 \text{ keV}$ , a do próton  $m_p \approx 938 \text{ MeV}$  e a do bóson de Higgs  $m_H \approx 125 \text{ GeV}$ .

Note que a imposição de  $\hbar = c = 1$  nos permite interpretar estas massas de outra forma: como comprimentos. Sabemos que unidades de energia e de comprimento são inversas, e portanto eventos com altas energias ocorrem a comprimentos minúsculos. A energia de ligação do elétron ao átomo de hidrogênio é cerca de  $-13.6 \text{ eV}$ , o que nos indica a escala de energia da Física Atômica e Molecular. Conforme as energias crescem e nos aproximamos da escala de  $1 \text{ MeV}$ , entra-se no domínio da Física Nuclear, e as escalas de  $1 \text{ GeV}$  em diante são usualmente de interesse da Física de Partículas Elementares.

Como a energia ainda não foi fixada, podemos seguir nosso processo de fixar constantes para tornar a massa adimensional. Isso é particularmente conveniente ao estudar Gravitação Quântica, em que podemos fixar a constante da gravitação universal de Newton impondo  $G = 1$ . Isto torna todas as unidades adimensionais.

É interessante observarmos como a unidade fundamental de energia obtida ao impor  $\epsilon_0 = \hbar = c = G$  se escreve em elétrons-volt, pois ela nos dá uma noção sobre a escala de energia em que a Gravitação Quântica se torna relevante. A este valor damos o nome de energia de Planck. Ele vale  $m_P = 1.221 \times 10^{19} \text{ GeV} = 1.221 \times 10^4 \text{ YeV}$ . Iota é o último prefixo do SI, e  $1 \text{ YeV} = 1 \times 10^{24} \text{ eV}$ .

---

\*A menos, é claro, que se insira novas unidades além das do Sistema Internacional.

Físicos lidando com Mecânica Estatística também apreciam fixar a constante de Boltzmann  $k_B = 1$ . A constante de Boltzmann representa um fator de conversão entre escalas de temperatura e energia, e portanto ocorre multiplicando a temperatura sempre que estivermos lidando com energias. Seu valor no SI é cerca de  $k_B \approx 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ . Assim, fixar  $k_B = 1$  significa tratar a temperatura em unidades de energia.

Há ainda um outro motivo para utilizarmos estes sistemas de unidades naturais: computadores não possuem precisão arbitrária. Ao lidar com números muito grandes ou muito pequenos em cálculos numéricos, estamos sujeitos a erros computacionais devido ao próprio computador ter dificuldade em lidar com números envolvendo muitas casas decimais, e isto é independentemente do algoritmo ou teoria que estejamos estudando. Tomar unidades que normalizam as constantes fundamentais para 1 minimizam os problemas devidos a erros numéricos.

Para uma excelente discussão acerca do poder da análise dimensional, uso de unidades naturais, e como estes conceitos ocorrem em teorias que vão da Mecânica Clássica à Gravidade Quântica, recomendo fortemente a leitura de [48].

### 2.2.2 Extinção de Línguas

Os métodos aqui exemplificados podem ser usados em contextos muito mais diversos que problemas de Mecânica Clássica. [33] é um excelente curso acerca do estudo de fenômenos não-lineares em Biologia explorando técnicas semelhantes às aqui empregadas\*

Exemplificaremos como estas mesmas ideias podem ser exploradas em outras áreas por meio do estudo da extinção de línguas. A discussão que segue é inspirada em [1] e no Problema 2.3.6 de [45].

Suponha que em uma comunidade existam duas línguas,  $X$  e  $Y$ , coexistindo. Por simplicidade, assumiremos as hipóteses simplificadoras de que todos os indivíduos falam ou  $X$  ou  $Y$ , mas não ambas. Assumimos ainda que todas as pessoas interagem da mesma maneira - o que corresponde a assumir uma sociedade sem estrutura social ou espacial. Pessoas em locais ou posições sociais distantes tendem a interagir menos, e aqui desprezamos estes efeitos.

Denotamos por  $x$  a porcentagem da população que fala  $X$ . Como todas as pessoas falam ou  $X$  ou  $Y$ , segue que a porcentagem da população que fala  $Y$  é  $1 - x$ . Denotaremos por  $p_{X \rightarrow Y}(x, s)$  a probabilidade por unidade de tempo de um falante de  $X$  passar a falar  $Y$  (e portanto deixar de falar  $X$ , dado que não existem pessoas bilíngues neste modelo). De forma análoga,  $p_{Y \rightarrow X}(x, s)$  denota a probabilidade por unidade de tempo de um falante de  $Y$  passar a falar  $X$ . Em ambos os casos,  $0 \leq s \leq 1$  é um parâmetro que representa o status social da língua  $X$  sobre  $Y$ : as vantagens econômicas, sociais, etc que os falantes de  $X$  tem sobre os falantes de  $Y$ . Por exemplo, pode ser que os falantes de  $X$  tenham mais facilidade para obter emprego. As probabilidades  $p(x, s)$  são modeladas como funções de  $x$ , pois se  $X$  tem mais falantes, queremos que seja uma língua mais atrativa.

Assume-se que ninguém se interessa em mudar para uma língua sem falantes ou sem status social. Assim,  $p_{Y \rightarrow X}(0, s) = 0$  e  $p_{Y \rightarrow X}(x, 0) = 0$ . Também assumimos que a

---

\*Na verdade, foi assistindo a [33] que eu aprendi o método das nullclines para analisar o espaço de fases.

probabilidade que alguém passe a falar  $X$  cresce monotonicamente com  $x$  e  $s$ . Isso garante que de fato uma língua com mais falantes ou mais status social seja modelada como mais atrativa.

Por fim, note que trocar  $x \rightarrow 1 - x$  e  $s \rightarrow 1 - s$  é como trocar as línguas de lugar. Por consequência, desejamos que  $p_{X \rightarrow Y}(x, s) = p_{Y \rightarrow X}(1 - x, 1 - s)$ . Assumiremos, por fim, que as funções  $p(x, s)$  são suaves.

Nestas condições, o modelo é descrito pela equação diferencial

$$\dot{x} = (1 - x)p_{Y \rightarrow X}(x, s) - xp_{X \rightarrow Y}(x, s). \quad (2.23)$$

O primeiro termo descreve como a proporção de falantes de  $X$  cresce conforme falantes de  $Y$  passam a falar  $X$ , enquanto o segundo termo descreve como a proporção de falantes de  $X$  cai conforme falantes de  $X$  passam a falar  $Y$ .

**Exercício 48:**

Mostre que  $x = 0$  e  $x = 1$  são pontos fixos do sistema dinâmico dado pela Eq. (2.23), *i.e.*, mostre que  $\dot{x} = 0$  para  $x = 0$  ou  $x = 1$ . ✖

Este resultado é pouco surpreendente, mas confirma nossa intuição. Se toda a população fala uma única língua, então não há como outra língua surgir espontaneamente.

Para prosseguir, vamos assumir uma forma particular para as probabilidades. Assumiremos que  $p_{Y \rightarrow X}(x, s) = sx^a$ , onde  $a \geq 1$  é uma constante.

**Exercício 49:**

Mostre que se  $p_{Y \rightarrow X}(x, s) = sx^a$ , então  $p_{X \rightarrow Y}(x, s) = (1 - s)(1 - x)^a$ . ✖

Isto nos conduz ao novo sistema dinâmico descrito pela equação

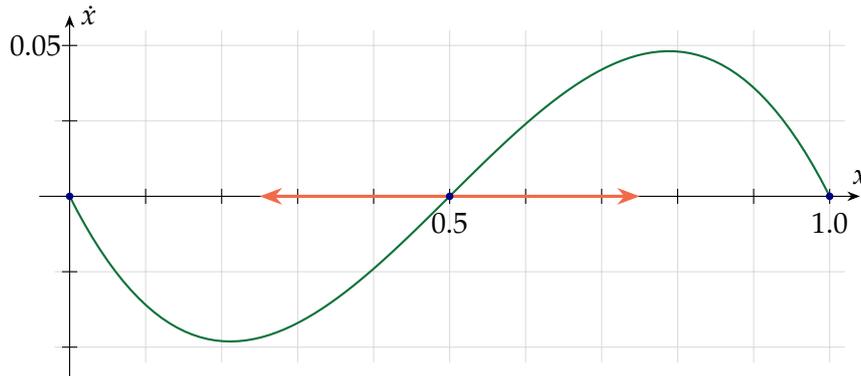
$$\dot{x} = s(1 - x)x^a - (1 - s)x(1 - x)^a. \quad (2.24)$$

Nossa experiência com o pêndulo simples sugere que comecemos buscando pelos pontos fixos do sistema dinâmico. O Exercício 48 nos diz que  $x = 0$  e  $x = 1$  são pontos fixos, mas ainda é possível que exista um terceiro.

Buscamos valores de  $x$  que anulem a Eq. (2.24). Logo, tem-se

$$\begin{aligned} s(1 - x_*)x_*^a &= (1 - s)x_*(1 - x_*)^a, \\ sx_*^{a-1} &= (1 - s)(1 - x_*)^{a-1}, \\ \frac{s}{1 - s} &= \left(\frac{1 - x_*}{x_*}\right)^{a-1}, \\ \frac{1 - x_*}{x_*} &= \left(\frac{s}{1 - s}\right)^{\frac{1}{a-1}} \equiv \kappa, \\ x_* &= \frac{1}{1 + \kappa}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde utilizamos, na primeira passagem, a hipótese de que  $x \neq 0$  e  $x \neq 1$ , dado que já sabemos que estes são pontos fixos.



**Figura 10.** Gráfico de  $\dot{x}$  em função de  $x$  para o modelo de Abrams-Strogatz da extinção de uma língua com parâmetros  $s = 0.5$  e  $a = 3$ . Como  $\dot{x}$  é positivo para  $x > 0.5$  e negativo para  $x < 0.5$ , tem-se que os pontos fixos  $x = 0$  e  $x = 1$  são estáveis, mas o terceiro ponto fixo,  $x_* = 0.5$ , é instável.

Podemos agora analisar a estabilidade dos pontos fixos. É instrutivo o fazermos a princípio por um método gráfico por duas razões:

- i. obter intuição sobre o procedimento;
- ii. nem todo problema permitirá que analisemos a estabilidade de maneira analítica.

Consideremos então o gráfico de  $\dot{x}$  em função de  $x$  exposto na Figura 10, que toma  $s = 0.5$  e  $a = 3$ .

Note que, para estes valores de  $s$  e  $a$ , temos que a Eq. (2.25) fornece

$$\begin{aligned} \kappa &= \left( \frac{0.5}{1 - 0.5} \right)^{\frac{1}{3-1}}, \\ &= 1, \end{aligned} \tag{2.26}$$

e portanto

$$x_* = \frac{1}{2}, \tag{2.27}$$

o que concorda com o gráfico de  $\dot{x}$  por  $x$ .

Pelo gráfico, vemos que para  $x > 0.5$  a derivada  $\dot{x}$  é positiva. Logo, se  $x(t) > 0.5$  para algum instante de tempo  $t$ , a tendência é que para  $t + \Delta t$  tenha-se  $x(t + \Delta t) > x(t)$ . Na região com  $x > 0.5$  os pontos tendem a ir cada vez mais na direção de  $x = 1$ . Isto é representado na Figura 10 com uma seta laranja. Logo,  $x = 1$  é um ponto estável: pequenas perturbações ao redor de  $x = 1$  fazem com que o sistema retorne ao estado  $x = 1$ .

De maneira análoga, conclui-se que pontos com  $x < 0.5$  tendem a se mover cada vez mais na direção de  $x = 0$ , o que é representado na Figura 10 por uma segunda seta laranja. Concluimos que  $x = 0$  também é estável.

Por fim, note que pequenas perturbações em torno de  $x_* = 0.5$  fazem com que o sistema dinâmico se afaste de  $x_* = 0.5$  e vá em direção a  $x = 0$  ou  $x = 1$ . Logo,  $x_* = 0.5$  é um ponto fixo instável.

A Figura 10 nos permite converter esta análise qualitativa numa afirmação algébrica. Como estamos estudando  $\dot{x}$  como função de  $x$ , denotemos sua dependência funcional por  $f(x)$ , onde

$$f(x) = s(1-x)x^a - (1-s)x(1-x)^a \quad (2.28)$$

e a Eq. (2.24) se escreve como

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.29)$$

Percebe-se que os pontos estáveis são aqueles em que  $f(x)$  é estritamente decrescente\*. De fato, suponha que  $x_0$  seja algum ponto fixo do sistema  $\dot{x} = f(x)$ . Para que  $x_0$  seja estável, requer-se que, para uma pequena perturbação  $\epsilon > 0$ ,  $f(x_0 + \epsilon) < 0$  e  $f(x_0 - \epsilon) > 0$ , de modo que o sistema sempre retorne ao estado original  $x_0$ . Para que  $f$  seja estritamente decrescente em  $x_0$ , é suficiente que  $f'(x_0) < 0$ . Um argumento semelhante mostra que  $f$  ser estritamente crescente em  $x_0$  implica que o ponto  $x_0$  é um ponto fixo instável.

Isto nos permite analisar o caso geral com  $s$  e  $a$  arbitrários. Diferenciando a Eq. (2.28) temos

$$f'(x) = -sx^a + as(1-x)x^{a-1} - (1-s)(1-x)^a + a(1-s)x(1-x)^{a-1}. \quad (2.30)$$

Vê-se que a expressão está bem definida pela hipótese de que  $a \geq 1$ .

Para  $x = 0$  e  $x = 1$  temos

$$f'(0) = -(1-s)(1-x)^a < 0, \quad f'(1) = -sx^a < 0. \quad (2.31)$$

Logo, os pontos fixos  $x = 0$  e  $x = 1$  são pontos fixos estáveis. Ou seja, se houve uma pequena quantidade de falantes de uma língua e uma gigantesca quantidade de falantes de outra, a língua mais falada tende a absorver os falantes da língua menos falada, que tende à extinção.

É possível que duas línguas coexistam? Isso pode ser determinado estudando a estabilidade do terceiro ponto fixo,  $x_*$ . Se for estável, então é possível que as duas línguas coexistam em harmonia, pois flutuações no número de falantes fazem com que o sistema volte à harmonia. No entanto, se o ponto fixo for instável, qualquer flutuação minúscula faz com que o sistema se mova na direção de extinção de uma das línguas.

Note que por mais que  $x_*$  seja um ponto fixo, isso não é suficiente para garantir a convivência harmoniosa das duas línguas, pois experimentalmente é, em geral, incrivelmente difícil que o sistema se encontre exatamente no ponto fixo - especialmente pelo fato de que o modelo é apenas um modelo efetivo, não uma descrição completa da realidade.

Suponha que  $f$  não é estritamente crescente em  $x_*$ . Visto que  $f(x_*) = 0$ , é preciso que exista  $\epsilon > 0$  com  $f(x_* - \epsilon) \geq 0$  ou  $f(x_* + \epsilon) \leq 0$ . Ademais, podemos tomar  $\epsilon < x_*$ .

---

\*Aqui estamos dizendo que " $f$  é estritamente decrescente no ponto  $x_0$ " para dizer que existe  $\epsilon > 0$  tal que  $f$  é estritamente decrescente em  $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ . O mesmo vale para o caso estritamente crescente.

Suponhamos que  $f(x_* - \epsilon) > 0$ . Como  $f(0) = 0$  e  $f'(0) < 0$ , existe  $\delta > 0$ , que pode ser tomado tal que  $\delta < x_* - \epsilon$ , com  $f(\delta) < 0$ . Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $y_*$  com  $\delta < y_* < x_* - \epsilon$  e  $f(y_*) = 0$ . Contudo, sabemos que os únicos pontos fixos do sistema são  $x = 0$ ,  $x = 1$  e  $x_*$ . Logo, a existência de  $y_*$  é absurda, e concluímos que não existe  $\epsilon > 0$  com  $f(x_* - \epsilon) > 0$ . De modo semelhante conclui-se que não há  $\epsilon > 0$  com  $f(x_* + \epsilon) < 0$ . Os casos em que  $f(x_* \pm \epsilon) = 0$  são ainda mais simples: tome  $y_* = x_* \pm \epsilon$  e pule para o final do argumento.

Desta forma, vemos que a hipótese de que  $f$  não é estritamente crescente em  $x_0$  é absurda, e portanto  $x_0$  é ponto de equilíbrio instável.

Assim, vemos que não é possível que duas línguas coexistam dentro do modelo de Abrams-Strogatz. Não podemos deixar de ressaltar que isso não necessariamente reflete a realidade: é preciso comparar as previsões do modelo com dados experimentais para ver o quão adequado ele é. Em particular, partimos de algumas hipóteses simplificadoras que podem ser muito ou pouco relevantes:

- i. quão desprezível é a estratificação social?
- ii. podemos desprezar a organização espacial?
- iii. a existência de pessoas bilíngues afeta o resultado?

Todas estas são fatores que podem fazer com que as previsões do modelo não condizam com a realidade. Para o caso de Abrams-Strogatz, os autores fizeram uma comparação das previsões com observações experimentais de línguas em processo de extinção. Para mais detalhes, veja [1].

### 2.3 Teorema do Virial

Consideremos uma função  $f$  dependente do tempo. Definimos sua média temporal como

$$\langle f \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(t) dt, \quad (2.32)$$

sempre que o limite existir.

#### Exercício 50:

Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável e periódica de período  $T$ . Mostre que

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (2.33)$$



#### Teorema [Virial]:

Considere um sistema mecânico com  $n$  graus de liberdade descrito por coordenadas generalizadas  $q_i$ , momentos generalizados  $p_i$  e uma Hamiltoniana  $H(q, p, t)$ . Se as funções  $q_i(t)$  e  $p_i(t)$  forem limitadas e as médias temporais de  $\sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i}$  e  $\sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i}$  existirem separadamente, então

$$\left\langle \sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\rangle = \left\langle \sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\rangle. \quad (2.34)$$



*Demonstração:*

Começemos definindo

$$G(t) \equiv \sum_i q_i(t)p_i(t). \quad (2.35)$$

Note que se  $q_i(t)$  e  $p_i(t)$  são limitados, então  $G(t)$  também o é. Perceba que

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \sum_i \dot{q}_i p_i + \sum_i q_i \dot{p}_i, \\ &= \sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Assim,

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = \left\langle \sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\rangle. \quad (2.37)$$

Se as médias temporais de  $\sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i}$  e  $\sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i}$  existem separadamente, então

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = \left\langle \sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\rangle - \left\langle \sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\rangle. \quad (2.38)$$

Contudo, perceba que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{dG}{dt} dt, \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{G(\tau) - G(-\tau)}{2\tau}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Como  $G$  é limitada, o numerador é limitado. O denominador, no entanto, é ilimitado.

Assim,

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = 0 \quad (2.40)$$

e conclui-se que

$$\left\langle \sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\rangle = \left\langle \sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\rangle. \quad (2.41) \quad \blacksquare$$

Este resultado pode parecer sem muito interesse, mas possui consequências interessantes. Para nos aquecer, começemos considerando um sistema de partículas sujeito a um potencial  $V(q)$ .

#### **Exercício 51:**

Mostre que a Hamiltoniana de um sistema de partículas sujeito a um potencial  $V(q)$  é dada em coordenadas cartesianas por

$$H(q, p, t) = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + V(q). \quad \text{✘} \quad (2.42)$$

✘

Note que, em coordenadas cartesianas,

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial T}{\partial p_i}. \quad (2.43)$$

**Exercício 52:**

Considere um sistema de partículas sujeito a um potencial  $V(q)$ . Mostre que, em coordenadas cartesianas, a energia cinética é uma função homogênea de grau 2 com relação aos momentos generalizados. ✚

Assim, vemos que, pelo Teorema de Euler para Funções Homogêneas, em coordenadas cartesianas tem-se

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\rangle &= \left\langle \sum_i p_i \frac{\partial T}{\partial p_i} \right\rangle, \\ &= 2 \langle T \rangle. \end{aligned} \quad (2.44)$$

O Teorema do Virial\* nos permite então concluir que, para um tal sistema,

$$2 \langle T \rangle = \left\langle \sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\rangle. \quad (2.45)$$

Note, porém, que em coordenadas cartesianas tem-se

$$\left\langle \sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\rangle = \left\langle \sum_i q_i \frac{\partial V}{\partial q_i} \right\rangle. \quad (2.46)$$

Tomemos pois o caso particular em que  $V$  é uma função homogênea de grau  $r$  nas coordenadas cartesianas  $q_i$ . Então, pelo Teorema de Euler para Funções Homogêneas,

$$2 \langle T \rangle = r \langle V \rangle. \quad (2.47)$$

Neste sistema, temos  $H = T + V$ , e portanto podemos reescrever o resultado acima relacionando a Hamiltoniana com a energia cinética ou potencial.

**Exercício 53:**

Mostre que para um sistema sob a ação de um potencial  $V(q)$  homogêneo de grau  $r$  nas coordenadas cartesianas valem as expressões

$$\langle H \rangle = \frac{2+r}{r} \langle T \rangle, \quad \langle V \rangle = \frac{2}{2+r} \langle H \rangle. \quad (2.48)$$

Como neste sistema temos  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ , sabemos que  $\frac{dH}{dt} = 0$  e portanto  $\langle H \rangle = H$ . Logo,

$$H = \frac{2+r}{r} \langle T \rangle, \quad \langle V \rangle = \frac{2}{2+r} H. \quad (2.49)$$

---

\*Virial não é uma pessoa. A quantidade  $\mathcal{V} = -\sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i}$  é uma generalização do chamado virial de Clausius, e daí segue o nome do teorema.

Para o oscilador harmônico simples\*,  $V(q) = \frac{kq^2}{2}$ , e portanto  $V$  é homogêneo de grau 2. Assim, o Teorema do Virial implica que  $\langle T \rangle = \langle V \rangle$ .

Para uma interação Newtoniana ou Coulombiana, temos  $V(r) = \frac{k}{r}$ , onde  $r$  é a distância à origem, dada em termos das coordenadas cartesianas por  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Logo,  $V$  é homogênea de grau  $-1$  e seguem que

$$2 \langle T \rangle = - \langle V \rangle, \quad H = - \langle T \rangle. \quad (2.50)$$

Como  $T$  é sempre positiva, vemos que isto implica que a energia é sempre negativa.

Isto é um resultado curioso. Não podemos fornecer mais energia para o sistema? Na verdade, podemos, mas não podemos nos esquecer que as hipóteses do Teorema do Virial incluíam supor que as funções  $q_i(t)$  e  $p_i(t)$  são limitadas. Caso esta hipótese falhe, não temos garantia de que o resultado vale. No caso, nós concluimos que a energia é sempre negativa para movimentos limitados, o que é correto. Contudo, para energias nulas ou positivas, o movimento passa a ser ilimitado e o Teorema do Virial deixa de valer. Para ver isto, faça o Exercício 98, página 122.

### 2.3.1 Gases Ideais

Uma aplicação possível do Teorema do Virial é a dedução da Lei dos Gases Perfeitos. Para tal, precisamos tomar emprestado um resultado da Mecânica Estatística: o teorema de equipartição de energia. Suponha que um sistema de  $N$  partículas é descrito por um Hamiltoniano  $H(q, p)$ . Para nossos propósitos, ele pode ser enunciado de maneira simplificada como “Todo termo quadrático na expressão para a energia cinética  $T$  de um sistema em equilíbrio termodinâmico contribui com um fator de  $\frac{1}{2}k_B\Theta$  para a energia cinética média do sistema, onde  $\Theta$  é a temperatura absoluta do sistema e  $k_B$  é a constante de Boltzmann.”

Consideremos um gás ideal composto por  $N$  partículas de massa  $m$  restrito a uma caixa de volume  $V$ . Um tal sistema é descrito pela Hamiltoniana

$$H(q, p) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\|\mathbf{p}_\alpha\|^2}{2m} + U(q), \quad (2.51)$$

onde  $U$  é um potencial dependendo das posições que restringe as partículas à caixa. A hipótese do gás ideal assume que a interação entre as partículas é desprezível.

Pelo teorema de equipartição de energia temos

$$\langle T \rangle = \frac{3}{2} N k_B \Theta, \quad (2.52)$$

onde o fator 3 é devido ao fato que a cada partícula estão associados 3 fatores quadráticos: as 3 componentes cartesianas do momento.

Assim, a Eq. (2.45) se torna

$$\left\langle \sum_{i=1}^{3N} q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\rangle = 3N k_B \Theta. \quad (2.53)$$

---

\*Por exemplo, um sistema massa-mola, como o descrito no Apêndice A.

Pela Eq. (2.51), vemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3N} q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} &= \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \cdot \nabla_{\alpha} U, \\ &= \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \cdot \nabla_{\alpha} U, \\ &= - \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \cdot \mathbf{F}_{\alpha},\end{aligned}\tag{2.54}$$

onde  $\mathbf{F}_{\alpha}$  denota a força agindo sobre a partícula  $\alpha$ .

Como as forças agindo sobre as partículas ocorrem apenas nas paredes da caixa, podemos reescrever esta equação como uma integral de superfície

$$- \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \cdot \mathbf{F}_{\alpha} = - \oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{F}.\tag{2.55}$$

A integral acima é feita não em um intervalo na reta real, mas em uma superfície bidimensional mergulhada em três dimensões. Estamos integrando sobre as paredes da caixa. Em cada ponto, tomamos o produto escalar da posição em que estamos com a pequena força  $d\mathbf{F}$  que age sobre uma partícula que esteja naquele local e então “somamos” todas estas contribuições ao longo de toda a superfície da caixa. O sinal  $\oint$  usado no lugar de  $\int$  simplesmente denota que a superfície é fechada, como uma casca esférica, ao invés de aberta como uma calota.  $S$  denota a superfície da caixa.

A força nas paredes sempre aponta para dentro da superfície e sempre é ortogonal à superfície, dado que as partículas são mantidas no interior da caixa. Podemos escrever a força em termos de uma pressão  $p$  na forma

$$- dF = p \hat{\mathbf{n}} dS,\tag{2.56}$$

onde  $dS$  é um elemento de superfície e  $\hat{\mathbf{n}}$  é o vetor unitário que em todo ponto aponta para o exterior da superfície e é a ela ortogonal. Assumimos

Desta forma, temos então que

$$\left\langle \sum_{i=1}^{3N} q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\rangle = p \oint_S \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS.\tag{2.57}$$

Para calcular a integral utilizaremos o chamado Teorema de Gauss\*, que afirma que, dada uma função  $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e sob certas condições,

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV,\tag{2.58}$$

onde  $V$  é o volume encapsulado pela superfície  $S$ . Isto pode parecer um resultado complicado, mas é mais simples do que aparenta: é apenas uma generalização do Teorema Fundamental do Cálculo.

---

\*Também conhecido como Teorema da Divergência, Teorema de Stokes, Teorema de Ostrogradskii, entre outros.

Estamos trabalhando em três dimensões, o que faz com os teoremas soem mais complicados do que realmente são. Em uma dimensão, um volume é o comprimento de um intervalo. A superfície que o enclausura são as fronteiras do intervalo. Por exemplo, para um intervalo  $[a, b]$ , a “superfície” que o enclausura é formada pelos pontos  $a$  e  $b$ . O vetor unitário  $\hat{\mathbf{n}}$  sempre aponta para fora, então ele é negativo em  $a$  e positivo em  $b$ . Na reta, um vetor é apenas um número real. Finalmente, o divergente se torna uma simples derivada. Logo, na reta tem-se que a Eq. (2.58) se escreve

$$F(b) - F(a) = \int_a^b \frac{dF}{dx} dx, \quad (2.59)$$

que é o Teorema Fundamental do Cálculo em sua forma usual.

Para nosso caso particular, temos

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^{3N} q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\rangle &= p \oint_S \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \\ &= p \int_V \nabla \cdot \mathbf{r} dV, \\ &= 3p \int_V dV, \\ &= 3pV, \end{aligned} \quad (2.60)$$

onde  $V$  denota o volume da caixa. Utilizando este resultado e a Eq. (2.53) temos então que

$$pV = Nk_B\Theta, \quad (2.61)$$

que é a Lei dos Gases Ideias.

Para mais informações sobre Mecânica Estatística, recomendo a leitura de [36], num nível mais introdutório, ou [24, 42] num nível um pouco mais avançado.

## 2.4 Colchetes de Poisson

Suponha que um certo sistema mecânico é descrito por uma Hamiltoniana  $H(q, p, t)$  e você deseja obter a evolução temporal de alguma quantidade  $f(q, p, t)$  que é função das coordenadas e momentos. A primeira tentativa poderia ser utilizar a regra da cadeia para escrever

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.62)$$

Utilizando as equações canônicas, tem-se

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.63)$$

Esta expressão nos sugere definir

$$\{f, H\}_{q,p} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \quad (2.64)$$

e então escrever, agora numa notação mais compacta,

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}_{q,p} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.65)$$

A Eq. (2.64) define o colchete de Poisson\* de  $f$  e  $H$ . A definição é mais ampla que apenas para uma função e uma Hamiltoniana. Dadas duas funções  $f(q, p, t)$  e  $g(q, p, t)$ , definimos seu colchete de Poisson  $\{f, g\}_{q,p}$  de modo análogo. Quando as coordenadas e momentos  $q, p$  estiverem subentendidas pelo contexto será comum denotarmos simplesmente  $\{f, g\}$ .

**Exercício 54:**

Mostre que as equações canônicas se escrevem em termos dos colchetes de Poisson como

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}. \quad (2.66)$$



**\* Exercício 55:**

Sejam  $f(q, p, t)$ ,  $g(q, p, t)$  e  $h(q, p, t)$  funções das coordenadas, momentos e tempo. Seja  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Mostre as seguintes propriedades do colchete de Poisson:

- i.  $\{f, g\} = -\{g, f\}$  (anticomutatividade);
- ii.  $\{f, \lambda\} = 0$ ;
- iii.  $\{f + \lambda g, h\} = \{f, h\} + \lambda\{g, h\}$  (linearidade);
- iv.  $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$  (regra de Leibniz);
- v.  $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$  (identidade de Jacobi);
- vi.  $\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\}$ ;
- vii.  $\{f, q_i\} = -\frac{\partial f}{\partial p_i}$ ;
- viii.  $\{f, p_i\} = +\frac{\partial f}{\partial q_i}$ .

Por fim, utilize as propriedades anteriores para mostrar que

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}. \quad (2.67)$$

Estas três últimas identidades são conhecidas como colchetes fundamentais.

Este exercício pode parecer incrivelmente entediante e inútil. Não opinarei sobre ser tedioso, mas ele possui consequências incrivelmente poderosas: agora podemos resolver problemas de Mecânica apenas brincando com as propriedades algébricas do colchete de Poisson.

---

\*Também conhecido como parêntese de Poisson, ou *Poisson bracket*, em inglês. Alguns autores utilizam a notação  $[f, H]$  ao invés de  $\{f, H\}$ .

Uma das aplicações mais diretas e simples do colchete de Poisson é identificar se uma dada função das coordenadas e do tempo é uma constante do movimento. Suponha que  $f$  dependa apenas das coordenadas e dos momentos, *i.e.*, não possua dependência explícita no tempo. Então, pela Eq. (2.65), vemos que  $f$  é constante do movimento se, e somente se,

$$\{f, H\} = 0. \quad (2.68)$$

Consideremos uma Hamiltoniana  $H(q, p, t)$  que não depende da coordenada  $q_i$ . Utilizando as propriedades do Exercício 55, temos

$$\begin{aligned} \{p_i, H\} &= -\{H, p_i\} \quad (\text{Propriedade i.}), \\ &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (\text{Propriedade viii.}), \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.69)$$

e portanto o momento  $p_i$  é constante do movimento.

Mas este não é nenhum resultado novo! Poderíamos tê-lo obtido diretamente das equações canônicas. Façamos algo mais difícil. Suponha que  $f(q, p, t)$  e  $g(q, p, t)$  são constantes do movimento. Então veja que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{f, g\} &= \{\{f, g\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} \quad (\text{Eq. (2.65)}), \\ &= -\{H, \{f, g\}\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} \quad (\text{Propriedade i.}), \\ &= \{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} \quad (\text{Propriedade v.}), \\ &= \{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} \quad (\text{Propriedade vi.}), \\ &= -\{\{g, H\}, f\} + \{\{f, H\}, g\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} - \left\{\frac{\partial g}{\partial t}, f\right\} \quad (\text{Propriedade i.}), \\ &= -\left\{\{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t}, f\right\} + \left\{\{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} \quad (\text{Propriedade iii.}), \\ &= \left\{f, \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t}\right\} + \left\{\{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} \quad (\text{Propriedade i.}), \\ &= \left\{f, \frac{dg}{dt}\right\} + \left\{\frac{df}{dt}, g\right\} \quad (\text{Eq. (2.65)}), \\ &= \{f, 0\} + \{0, g\} \quad (\text{por hipótese}), \\ &= 0 \quad (\text{Propriedade ii.}). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Logo,  $\{f, g\}$  é também constante do movimento, e fomos capazes de provar isso sem calcular uma única derivada: bastaram as propriedades algébricas provadas no Exercício 55.

### 2.4.1 Oscilador Harmônico Simples e Colchetes de Poisson

Isso pode ainda não ter lhe convencido do poder dos colchetes de Poisson. Vamos então resolver o problema do oscilador harmônico sem nos preocupar com equações diferenciais,

integrais, ou quase nada de Cálculo. De fato, no que segue bastam as propriedades dos colchetes e Poisson e algum conhecimento sobre séries de Taylor. A Hamiltoniana do oscilador harmônico é

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}. \quad (2.71)$$

Definimos, por simplicidade,  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ . Em breve perceberemos a utilidade desta notação.

Dadas condições iniciais  $q(0)$  e  $p(0)$ , desejamos obter a expressão para  $q(t)$  num instante arbitrário de tempo  $t$ . Podemos escrever  $q(t)$  em série de Taylor na forma

$$q(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n q^{(n)}(0)}{n!}, \quad (2.72)$$

onde  $q^{(n)}$  denota a  $n$ -ésima derivada de  $q$ .

Sabemos que  $\dot{q} = \{q, H\}$ , então calculemos o colchete de Poisson de  $q$  com a Hamiltoniana do oscilador harmônico. Temos

$$\begin{aligned} \{q, H\} &= \left\{ q, \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} \right\} \quad (\text{por hipótese}), \\ &= \frac{1}{2m} \{q, p^2\} + \frac{k}{2} \{q, q^2\} \quad (\text{Propriedade iii.}), \\ &= \frac{p}{m} \{q, p\} + kq \{q, q\} \quad (\text{Propriedade iv.}), \\ &= \frac{p}{m} \quad (\text{colchetes fundamentais}). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Por completude, calculemos também o colchete de  $p$  com  $H$ . Tem-se

$$\begin{aligned} \{p, H\} &= \frac{p}{m} \{p, p\} + kq \{p, q\} \quad (\text{análogo ao caso anterior}), \\ &= \frac{p}{m} \{p, p\} - kq \{q, p\} \quad (\text{Propriedade i.}), \\ &= -kq \quad (\text{colchetes fundamentais}). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Podemos agora calcular as derivadas de  $q$ . Veja que

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \{q, H\}, \\ &= \frac{p}{m}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

e portanto  $\dot{q}$  não depende explicitamente do tempo. Logo, pela Eq. (2.65),

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= \{\dot{q}, H\}, \\ &= \frac{1}{m} \{p, H\}, \\ &= -\frac{k}{m} q, \\ &= -\omega^2 q. \end{aligned} \quad (2.76)$$

$\dot{q}$  também não depende explicitamente do tempo, então podemos seguir iterando o processo. De modo geral, ter-se-á

$$\begin{aligned} q^{(2n)} &= (-1)^n \omega^{2n} q, \\ q^{(2n+1)} &= (-1)^n \omega^{2n} \frac{p}{m}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Estas expressões certamente valem para os casos base  $n = 0$ :  $q = q$  é verdade trivialmente e  $\dot{q} = \frac{p}{m}$  foi mostrado na Eq. (2.75). Para mostrar que valem no caso geral, seguimos por indução.

Uma demonstração por indução funciona da seguinte maneira: suponha que você esteja analisando uma propriedade de números naturais  $P(n)$ . Por exemplo, analisando quais números naturais tornam a Eq. (2.77) verdadeira. Se esta propriedade valer para  $n = 0$  e for verdade que  $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$  – ou seja, a propriedade valer para  $n$  implica a propriedade valer para  $n + 1$  – então a propriedade precisa valer para todos os naturais. Isso é, de certa forma, intuitivo:  $P(0)$  implica  $P(1)$ , que implica  $P(2)$ , que implica  $P(3)$ , e assim por diante. Já sabemos que a Eq. (2.77) vale para  $n = 0$ . Queremos agora assumir que ela vale para algum natural qualquer  $n$  e provar que isso implica que ela valha para  $n + 1$ . Assim, a validade para  $n = 0$  implica a validade para  $n = 1$ , que implica para  $n = 2$ , etc.

Seja então  $n$  natural. Assumimos que  $q^{(2n)} = (-1)^n \omega^{2n} q$ . Queremos provar que a mesma expressão vale para  $n + 1$ . Como  $q^{(2n)}$  não depende explicitamente do tempo, temos então que

$$\begin{aligned} q^{(2n+1)} &= \{q^{(2n)}, H\}, \\ &= (-1)^n \omega^{2n} \{q, H\}, \\ &= (-1)^n \omega^{2n} \frac{p}{m}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Logo, se valer a expressão para  $q^{(2n)}$ , sabemos que também vale a expressão para  $q^{(2n+1)}$ . Isso é útil, mas não o que queremos provar. Contudo, como  $q^{(2n+1)}$  não depende explicitamente do tempo, notamos que

$$\begin{aligned} q^{(2(n+1))} &= \{q^{(2n+1)}, H\}, \\ &= (-1)^n \omega^{2n} \frac{1}{m} \{p, H\}, \\ &= (-1)^{n+1} \omega^{2n+1} q. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Logo, ao assumir que a primeira linha da Eq. (2.77) vale para algum natural  $n$ , somos forçados a aceitar que ela também vale para  $n + 1$ . Como ela vale para  $n = 0$ , concluímos que ela vale para todo natural  $n$ . Coincidentemente, ao longo da demonstração vimos que a validade da primeira linha para algum  $n$  implica a validade da segunda para o mesmo  $n$ . Logo, a segunda linha também vale para todo natural  $n$ .

Com as expressões da Eq. (2.77) em mãos, podemos reescrever a série de Taylor para  $q(t)$ . Temos agora

$$\begin{aligned}
q(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n q^{(n)}(0)}{n!}, \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n} q^{(2n)}(0)}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1} q^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}, \\
&= q(0) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{2n}}{(2n)!} + \frac{p(0)}{m\omega} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{2.80}
\end{aligned}$$

Estas são apenas as séries de Taylor para um cosseno e um seno! Assim, temos

$$q(t) = q(0) \cos(\omega t) + \frac{p(0)}{m\omega} \sin(\omega t). \tag{2.81}$$

### 2.4.2 Série de Lie

O procedimento anterior pode ser feito de maneira mais geral. Consideremos uma Hamiltoniana independente do tempo  $H(q, p)$ . Seja  $f(q, p)$  uma função dependente das variáveis canônicas\* mas sem dependência explícita no tempo. Perceba que o colchete de Poisson  $\{f, H\}$  também não pode depender explicitamente do tempo. Logo,

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d}{dt} \{f, H\} = \{\{f, H\}, H\}, \tag{2.82}$$

que também não pode depender explicitamente do tempo, e assim por diante. Logo, a série de Taylor

$$q(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n q^{(n)}(0)}{n!}, \tag{2.83}$$

onde  $q$  é uma coordenada generalizada†, pode ser escrita como

$$q(t) = q(0) + \{q, H\}_0 + \frac{1}{2} \{\{q, H\}, H\}_0 + \dots \tag{2.84}$$

Por simplicidade, podemos definir o operador de Lie,  $\mathcal{L}_H$ , por

$$\mathcal{L}_H f \equiv \{f, H\}, \tag{2.85}$$

que então nos permite escrever

$$q(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n \mathcal{L}_H^n q(0)}{n!}, \tag{2.86}$$

que é conhecida como série de Lie.

\*Por vezes nos referiremos deste modo às coordenadas e momentos generalizados de maneira coletiva.

†Note que  $q(t)$  não possui dependência explícita em  $t$ , apenas implícita. A dependência explícita de  $q$  é apenas em  $q$ , que é por si só uma das variáveis sendo consideradas.

Como

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (2.87)$$

podemos definir a exponencial do operador de Lie por

$$e^{t\mathcal{L}_H} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n \mathcal{L}_H^n}{n!}, \quad (2.88)$$

e então escrever

$$q(t) = e^{t\mathcal{L}_H} q(0). \quad (2.89)$$

Este tipo de expressão é extremamente comum em Mecânica Quântica, onde o operador  $e^{t\mathcal{L}_H}$  é conhecido como operador de evolução.

Embora nem sempre seja simples somar os termos da série de Lie como foi no caso do oscilador harmônico, ela também pode ser empregada em outros problemas, que são então resolvidos sem a necessidade de menção a equações diferenciais. Para mais exemplos, veja [13] ou a seção 8.7 de [29].

## 2.5 Transformações Canônicas

Conforme foi visto no Exercício 34, as equações de Euler-Lagrange são invariantes sob transformações de coordenadas inversíveis. Estas transformações, da forma  $q \rightarrow Q(q, t)$ , são chamadas de transformações pontuais. No formalismo Lagrangeano, analisávamos a dinâmica a partir do espaço de configurações, que dispunha de  $n$  dimensões num problema com  $n$  graus de liberdade. No formalismo Hamiltoniano, estamos trabalhando no espaço de fases, que possui  $2n$  dimensões. Isto nos permite efetuar uma gama de transformações consideravelmente maior.

Para estudar estas novas transformações, comecemos notando que podemos escrever as equações canônicas de forma mais simétrica. Um estado no espaço de fases é descrito pelo vetor  $\mathbf{x} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^\top$ . Podemos introduzir a matriz simplética  $2n \times 2n$ , definida como

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

e escrever as equações canônicas como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{J} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad (2.91)$$

onde denota-se

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \equiv \left( \frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_n}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n} \right)^\top. \quad (2.92)$$

Esta é conhecida como a forma simplética das equações canônicas. A palavra “simplético” foi cunhada por Hermann Weyl, e significa entrelaçado.

Consideremos agora uma transformação de variáveis  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}(\mathbf{x})$ . Pela regra da cadeia, sabemos que

$$\dot{y}_i = \sum_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \dot{x}_j. \quad (2.93)$$

Utilizando a Eq. (2.91), tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= \sum_{j,k} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \mathbb{J}_{jk} \frac{\partial H}{\partial x_k}, \\ &= \sum_{j,k,l} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \mathbb{J}_{jk} \frac{\partial y_l}{\partial x_k} \frac{\partial H}{\partial y_l}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Podemos nos livrar dos índices ao escrever esta expressão em termos da matriz Jacobiana introduzida no Exercício 8. Se a denotarmos por  $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$ , temos

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{y}^\top}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}. \quad (2.95)$$

Vemos então que a forma das equações canônicas é preservada pela transformação se valer que

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{y}^\top}{\partial \mathbf{x}} = \mathbb{J}, \quad (2.96)$$

pois nesta situação, a Eq. (2.95) se torna

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbb{J} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}, \quad (2.97)$$

que é idêntica, em forma, à Eq. (2.91).

Uma matriz Jacobiana que satisfaz à Eq. (2.96) é dita ser simplética. Transformações de variáveis com matriz Jacobiana simplética são chamadas de transformações canônicas.

Não se assuste se não conhecer muito bem como se pode calcular a matriz Jacobiana de uma transformação ou algo semelhante. Podemos reformular esta condição em termos dos colchetes de Poisson.

**Exercício 56:**

Sejam  $f(q, p, t)$  e  $g(q, p, t)$  funções das variáveis canônicas e do tempo. Mostre que podemos escrever o colchete de Poisson de  $f$  e  $g$  como

$$\{f, g\} = \frac{\partial f^\top}{\partial \mathbf{x}} \mathbb{J} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.98)$$



**Exercício 57:**

Mostre que dada uma função  $f(\mathbf{x})$  e uma transformação de variáveis  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}(\mathbf{x})$  vale

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{y}^\top}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}. \quad (2.99)$$

Como, dadas duas matrizes  $A$  e  $B$ ,  $(AB)^\top = B^\top A^\top$ , segue que

$$\frac{\partial f^\top}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial f^\top}{\partial \mathbf{y}} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.100)$$

✚

**Teorema:**

Os colchetes de Poisson são invariantes sob transformações canônicas. Ademais, uma transformação  $q, p \rightarrow Q, P$  é canônica se, e somente se, preservar os colchetes fundamentais, i.e., se, e somente se,

$$\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = 0, \quad \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0, \quad \{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij}. \quad (2.101)$$

□

*Demonstração:*

Queremos mostrar que se a transformação  $q, p \rightarrow Q, P$  for canônica, então  $\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P}$ , para quaisquer funções das variáveis canônicas e do tempo  $f(q, p, t)$ ,  $g(q, p, t)$ . Denotemos  $\mathbf{x} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^\top$  e  $\mathbf{y} = (Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)^\top$ . Temos, pelo Exercício 56,

$$\{f, g\}_{q,p} = \frac{\partial f^\top}{\partial \mathbf{x}} \mathbb{J} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.102)$$

Pelo Exercício 57,

$$\{f, g\}_{q,p} = \frac{\partial f^\top}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{y}^\top}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}. \quad (2.103)$$

Para uma transformação canônica, a matriz Jacobiana é simplética e temos

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{q,p} &= \frac{\partial f^\top}{\partial \mathbf{y}} \mathbb{J} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}, \\ &= \{f, g\}_{Q,P}. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Logo, os colchetes de Poisson são invariantes sob transformações canônicas.

Note agora que

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} & \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial P_i}{\partial q_j} & \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \end{pmatrix}. \quad (2.105)$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{y}^\top}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} & \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial P_i}{\partial q_j} & \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \delta_{jk} \\ -\delta_{jk} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_l}{\partial q_k} & \frac{\partial P_l}{\partial q_k} \\ \frac{\partial Q_l}{\partial p_k} & \frac{\partial P_l}{\partial p_k} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} & \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial P_i}{\partial q_j} & \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_l}{\partial p_j} & \frac{\partial P_l}{\partial p_j} \\ -\frac{\partial Q_l}{\partial q_j} & -\frac{\partial P_l}{\partial q_j} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \sum_j \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial Q_l}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_l}{\partial q_j} \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} & \sum_j \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial P_l}{\partial p_j} - \frac{\partial P_l}{\partial q_j} \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \\ \sum_j \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \frac{\partial Q_l}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_l}{\partial q_j} \frac{\partial P_i}{\partial p_j} & \sum_j \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \frac{\partial P_l}{\partial p_j} - \frac{\partial P_l}{\partial q_j} \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \{Q_i, Q_l\}_{q,p} & \{Q_i, P_l\}_{q,p} \\ \{P_i, Q_l\}_{q,p} & \{P_i, P_l\}_{q,p} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Por definição, uma transformação é canônica se, e somente se, sua matriz Jacobiana for simplética. Logo, a transformação  $q, p \rightarrow Q, P$  é canônica se, e somente se,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{y}^\top}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbb{J}, \\ \begin{pmatrix} \{Q_i, Q_l\}_{q,p} & \{Q_i, P_l\}_{q,p} \\ \{P_i, Q_l\}_{q,p} & \{P_i, P_l\}_{q,p} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \delta_{il} \\ -\delta_{il} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Logo, a transformação  $q, p \rightarrow Q, P$  é canônica se, e somente se,

$$\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = 0, \quad \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0, \quad \{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij}, \quad (2.108)$$

como queríamos demonstrar. ■

Vemos então que os índices  $q, p$  são de fato desnecessários nos colchetes de Poisson. Podemos calculá-los com relação a qualquer sistema de variáveis canônicas relacionado por transformações canônicas ao sistema original. Ademais, vemos agora que não somos obrigados a fazer cálculos explícitos com as matrizes Jacobianas. Se assim desejarmos, basta usar os colchetes de Poisson!

O leitor atento pode ter percebido que neste desenvolvimento, embora tenhamos definido a noção de transformação canônica sem fazer menção à sua dependência no tempo\*, trabalhamos apenas com transformações canônicas independentes do tempo  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}(\mathbf{x})$ . Estas na verdade são conhecidas como transformações canônicas restritas, e podemos mostrar que o caso mais geral em que  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ , também preserva a forma das equações canônicas, mas sob um preço. A Hamiltoniana  $H$  não será mais dada simplesmente pela mesma função que tínhamos anteriormente escrita nas novas variáveis. Haverá alterações mais profundas. Desta vez, a transformação  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  manterá a forma das equações canônicas, mas substituirá a Hamiltoniana  $H(\mathbf{x}, t)$  por uma “Kamiltoniana”  $K(\mathbf{y}, t)$ . Ou seja, para toda Hamiltoniana  $H(\mathbf{x}, t)$  com

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{J} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad (2.109)$$

a transformação  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ , se for canônica, será tal que existe uma Kamiltoniana  $K(\mathbf{y}, t)$  com

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbb{J} \frac{\partial K}{\partial \mathbf{y}}. \quad (2.110)$$

O desenvolvimento é semelhante ao que fizemos até agora, mas com alguns detalhes suplementares.

Começamos das equações canônicas nas variáveis originais  $\mathbf{x}$ . Pela regra da cadeia e pelo Exercício 57,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbb{J} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} &= \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{y}^\top}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (2.111)$$

---

\*Definimos uma transformação como sendo canônica sempre que sua matriz Jacobiana for simplética.

**Exercício 58:**

Mostre que

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbb{1}. \quad (2.112)$$



Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} &= \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{y}^\top}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}, \\ \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{y}^\top}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}, \\ \dot{\mathbf{y}} &= \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{y}^\top}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}, \\ &= \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{y}^\top}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{x}^\top}{\partial \mathbf{y}} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (2.113)$$

No caso de uma transformação canônica, a matriz Jacobiana é simplética e vale que

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbb{J} \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{x}^\top}{\partial \mathbf{y}} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right). \quad (2.114)$$

Se pudermos escrever o termo em parênteses na forma  $\frac{\partial K}{\partial \mathbf{y}}$  para alguma Kamiltoniana  $K$ , teremos mostrado que transformações canônicas gerais preservam a forma das equações canônicas. Para isso, é suficiente mostrar que o segundo termo dentro dos parênteses pode ser escrito como  $\frac{\partial I}{\partial \mathbf{y}}$  para algum  $I$ . Inserindo os índices, temos que o segundo termo é

$$\frac{\partial x_k}{\partial y_i} \mathbb{J}_{kl} \frac{\partial x_l}{\partial t}. \quad (2.115)$$

Como  $i$  é o único índice livre na expressão, se houver  $I$  que se iguale a esse termo teremos, necessariamente,

$$\frac{\partial I}{\partial y_i} = \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \mathbb{J}_{kl} \frac{\partial x_l}{\partial t}. \quad (2.116)$$

Vemos então que uma condição suficiente para a existência de tal  $I$  é que

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left( \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \mathbb{J}_{kl} \frac{\partial x_l}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 I}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 I}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \mathbb{J}_{kl} \frac{\partial x_l}{\partial t} \right). \quad (2.117)$$

Esta expressão é equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \mathbb{J}_{kl} \frac{\partial^2 x_l}{\partial t \partial x_j} &= \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \mathbb{J}_{kl} \frac{\partial^2 x_l}{\partial t \partial x_i}, \\ &= - \frac{\partial^2 x_l}{\partial t \partial x_i} \mathbb{J}_{lk} \frac{\partial x_k}{\partial y_j}, \\ \frac{\partial \mathbf{x}^\top}{\partial \mathbf{y}} \mathbb{J} \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t \partial \mathbf{y}} &= - \frac{\partial^2 \mathbf{x}^\top}{\partial t \partial \mathbf{y}} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Assim, concluímos que uma condição suficiente para a existência de  $K$  para qualquer Hamiltoniana previamente fornecida  $H$  é

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{x}^\top}{\partial \mathbf{y}} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \right) = 0. \quad (2.119)$$

Por sorte, estamos lidando com uma transformação canônica. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{y}^\top}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbb{J}, \\ \mathbb{J} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{x}^\top}{\partial \mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (2.120)$$

**Exercício 59:**

Seja  $\mathbb{M}$  uma matriz tal que

$$\mathbb{M} \mathbb{J} \mathbb{M}^\top = \mathbb{J}. \quad (2.121)$$

Mostre que

$$\mathbb{M}^\top \mathbb{J} \mathbb{M} = \mathbb{J}. \quad (2.122)$$



Logo,

$$\frac{\partial \mathbf{x}^\top}{\partial \mathbf{y}} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbb{J}, \quad (2.123)$$

e sendo  $\mathbb{J}$  constante, é claro que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbb{J}) = 0. \quad (2.124)$$

Assim, é satisfeita a condição suficiente para a existência da Kamiltoniana, e vemos que transformações canônicas preservam a forma das equações canônicas, mesmo no caso em que a transformação depende do tempo.

**2.5.1 Transformações Canônicas Infinitesimais**

Consideremos um caso particular de transformação canônica: uma transformação infinitesimal. Isto é, uma transformação da forma

$$q_i \rightarrow Q(q, p, t) = q_i + \epsilon f_i(q, p, t), \quad p_i \rightarrow P_i(q, p, t) = p_i + \epsilon g_i(q, p, t), \quad (2.125)$$

onde  $\epsilon$  é uma constante infinitesimal.

É conveniente, como sempre, trabalharmos em notação simplética, denotando  $\mathbf{x} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^\top$ ,  $\mathbf{y} = (Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)^\top$ ,  $\mathbf{v} = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)^\top$ . Assim, temos

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \epsilon) = \mathbf{x} + \epsilon \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (2.126)$$

A matriz Jacobiana da transformação é dado por

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbb{1} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.127)$$

Para que a transformação seja canônica, é preciso que sua matriz Jacobiana seja sim-  
plética. Logo, queremos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{y}^\top}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbb{J}, \\ \left( \mathbb{1} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbb{J} \left( \mathbb{1} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{v}^\top}{\partial \mathbf{x}} \right) &= \mathbb{J}, \\ \mathbb{1} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \mathbb{J} + \epsilon \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{v}^\top}{\partial \mathbf{x}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= \mathbb{J}. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Como  $\epsilon$  está sendo tomado como infinitesimal, podemos ignorar os termos com ordem  $\epsilon^2$  e superior. Isto nos conduz à condição

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \mathbb{J} &= -\mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{v}^\top}{\partial \mathbf{x}}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{v}^\top}{\partial \mathbf{x}} \mathbb{J}, \\ \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} &= -\frac{\partial \mathbf{v}^\top}{\partial \mathbf{x}} \mathbb{J}, \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}^\top}{\partial \mathbf{x}} \mathbb{J}^\top, \\ &= \left( \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Em notação com índices, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} &= \mathbb{J}_{kj} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbb{J}_{ij} v_j) &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbb{J}_{kj} v_j), \end{aligned} \quad (2.130)$$

o que nos leva a concluir que existe uma função  $G(q, p, t)$  com

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{ij} v_j &= -\frac{\partial G}{\partial x_i}, \\ \mathbb{J} \mathbf{v} &= -\frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}}, \\ \mathbf{v} &= \mathbb{J} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.131)$$

Podemos interpretar a Eq. (2.126) como uma evolução infinitesimal de  $\mathbf{x}$  em termos do parâmetro  $\epsilon$  e escrever

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\epsilon} = \mathbb{J} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.132)$$

$G$  é conhecido como o gerador da transformação canônica infinitesimal. Perceba a semelhança da Eq. (2.132) e da Eq. (2.91). O gerador  $G$  pode ser interpretado como uma “Hamiltoniana” que gera um “fluxo Hamiltoniano” no espaço de fases, guiando a evolução do sistema ao longo do parâmetro  $\epsilon$ . De maneira análoga, a evolução temporal nada

mais que é uma transformação canônica gerada pela Hamiltoniana  $H$ . Contudo, até o momento estamos lidando apenas com transformações infinitesimais. A evolução temporal em intervalos de tempos finitos pode ser compreendida em termos de transformações canônicas?

Daremos a resposta em termos gerais, ao utilizar a Eq. (2.132) para generalizar alguns dos resultados que obtivemos para a dinâmica Hamiltoniana.

**Exercício 60:**

Seja  $f(q, p, t)$  uma função das variáveis canônicas e  $G(q, p)$  o gerador de uma transformação canônica infinitesimal  $q, p, \rightarrow Q, P$  parametrizada por  $\epsilon$ . Denotemos  $\mathcal{L}_G f \equiv \{f, G\}$ . Mostre que

$$f(Q, P) = (1 + \epsilon \mathcal{L}_G) f(q, p). \quad (2.133)$$



Podemos aplicar duas transformações canônicas consecutivas para obter

$$f(Q, P) = (1 + \epsilon \mathcal{L}_G)(1 + \epsilon \mathcal{L}_G) f(q, p). \quad (2.134)$$

Podemos aplicar  $N$  transformações canônicas consecutivas para obter

$$f(Q, P) = (1 + \epsilon \mathcal{L}_G)^N f(q, p). \quad (2.135)$$

Suponha agora que  $\kappa$  seja um número finito. Podemos obter uma transformação finita ao escrever  $\epsilon = \frac{\kappa}{N}$  e tomar o limite com  $N \rightarrow \infty$ . Tem-se

$$f(Q, P) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\kappa}{N} \mathcal{L}_G\right)^N f(q, p). \quad (2.136)$$

Este é o limite fundamental para uma exponencial. Assim, podemos escrever formalmente (embora não necessariamente rigorosamente)

$$f(Q, P) = e^{\kappa \mathcal{L}_G} f(q, p). \quad (2.137)$$

Expandindo a exponencial numa série de Taylor, temos que

$$f(\kappa) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\kappa^n \mathcal{L}_G^n}{n!} f(0), \quad (2.138)$$

que nada mais é que a série de Lie para uma transformação canônica arbitrária. A versão que havíamos visto anteriormente nada mais que é um caso particular desta. Vê-se pois que a evolução temporal finita nada mais é que composição de infinitas evoluções infinitesimais.

**Exercício 61:**

Considere a componente  $\hat{z}$  do momento angular  $\mathbf{L}$ , dada por  $L_z = xp_y - yp_x$ . Considere uma transformação canônica gerada por  $L_z$  e parametrizada por  $\theta$ . Utilize a série de Lie para mostrar que a transformação consiste de uma rotação em torno do eixo  $\hat{z}$ . 

**Exercício 62:**

Considere uma transformação canônica gerada pela componente  $\hat{z}$  do momento linear,  $p_z$ . Mostre, por meio da série de Lie, que uma transformação canônica gerada por  $p_z$  é uma translação no eixo  $\hat{z}$ . ✠

**Exercício 63:**

O comutador de dois operadores  $A$  e  $B$  é definido como  $[A, B] = AB - BA$ . Sejam  $X(q, p)$  e  $Y(q, p)$  funções das variáveis canônicas. Mostre que

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{\{X, Y\}}. \quad (2.139)$$

✠

**\* Exercício 64 [Rotações Comutam?]:**

O símbolo de Levi-Civita,  $\epsilon_{ijk}$  – onde  $i, j, k$  assumem os valores 1, 2, 3 – é definido como sendo totalmente antissimétrico e por  $\epsilon_{123} = 1$ . Por ser totalmente antissimétrico, segue que  $\epsilon_{213} = -1$ , outra troca de índices fornece que  $\epsilon_{231} = 1$ , e assim por diante. Note que como  $\epsilon_{113} = -\epsilon_{113}$ ,  $\epsilon_{113} = 0$ . Assim, o símbolo de Levi-Civita vale zero se houver repetição de índices e as demais possibilidades são

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} &= \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \\ \epsilon_{132} &= \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Mostre que

$$\sum_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}. \quad (2.141)$$

Em coordenadas cartesianas, considere o vetor de momento angular  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . Mostre que suas componentes são dadas por

$$L_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} r_j p_k. \quad (2.142)$$

Utilize as Eqs. (2.141) e (2.142) para mostrar que

$$\{L_i, L_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} L_k. \quad (2.143)$$

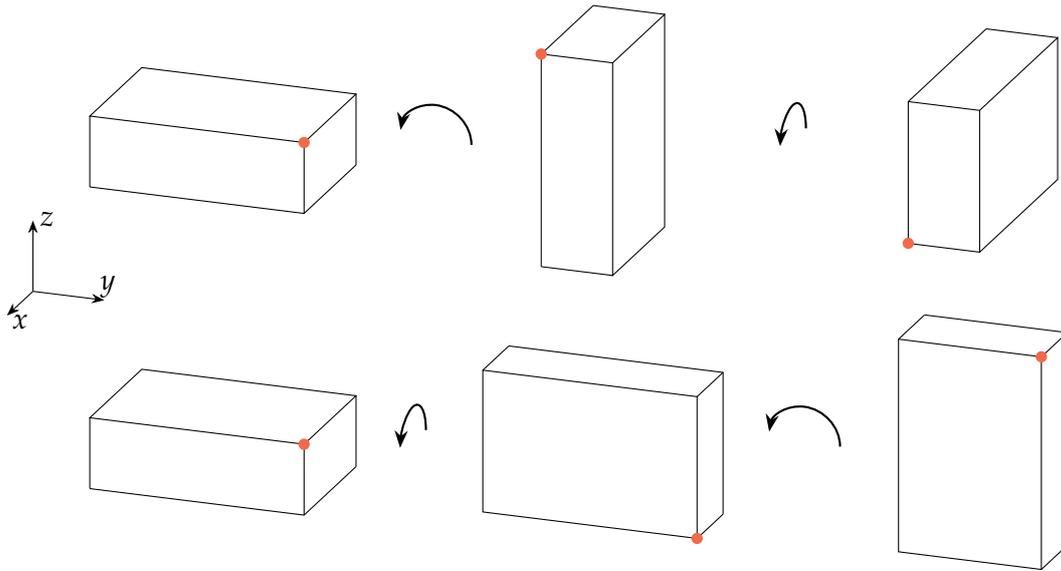
Utilize o Exercício 63 para concluir que

$$[\mathcal{L}_{L_i}, \mathcal{L}_{L_j}] = \mathcal{L}_{\sum_k \epsilon_{ijk} L_k}. \quad (2.144)$$

Isto pode parecer extremamente abstrato, então façamos uma conexão com o mundo real. Em primeiro lugar, deixemos de usar os índices abstratos e escrevamos

$$[\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y] = \mathcal{L}_z, \quad (2.145)$$

onde por simplicidade denotamos  $\mathcal{L}_x \equiv \mathcal{L}_{L_x}$ , com definições análogas para  $y$  e  $z$ .



**Figura 11.** Pegue um livro. A partir de seu centro, escolha três eixos  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$ . Rotacionar o livro  $90^\circ$  em torno de  $\hat{x}$  e depois  $90^\circ$  em torno de  $\hat{y}$  não é a mesma coisa que rotacionar  $90^\circ$  em torno de  $\hat{y}$  e depois  $90^\circ$  em torno de  $\hat{x}$ .

Suponhamos que queiramos rotacionar as coordenadas de um sistema em  $\theta$  em torno do eixo  $\hat{x}$  e a seguir queremos rotacionar em  $\phi$  em torno de  $\hat{y}$ . Muito abstrato ainda? Tornemos ainda mais concreto. Pegue um livro. A partir de seu centro, escolha três eixos  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$ . Tomemos  $\theta = \phi = 90^\circ$ . Rotacionar o livro em torno de  $\hat{x}$  e depois em torno de  $\hat{y}$  é a mesma coisa que rotacionar em torno de  $\hat{y}$  e depois em torno de  $\hat{x}$ ? Veja a Figura 11.

rotações finitas não comutam, e isso está refletido na estrutura de colchetes de Poisson do momento angular. A transformação que rotaciona  $\theta$  em torno de  $\hat{x}$  e depois  $\phi$  em torno de  $\hat{y}$  é  $e^{\phi\mathcal{L}_y}e^{\theta\mathcal{L}_x}$ . Já a transformação que rotaciona  $\phi$  em torno de  $\hat{y}$  e depois  $\theta$  em torno de  $\hat{x}$  é  $e^{\theta\mathcal{L}_x}e^{\phi\mathcal{L}_y}$ . Como  $[\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y] = \mathcal{L}_z \neq 0$ ,

$$e^{\theta\mathcal{L}_x}e^{\phi\mathcal{L}_y} \neq e^{\phi\mathcal{L}_y}e^{\theta\mathcal{L}_x}. \quad (2.146)$$

O produto de exponenciais de operadores pode ser escrito em termos da Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff\*, que afirma que

$$e^Xe^Y = \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] + \dots\right), \quad (2.147)$$

onde  $\dots$  denota outros comutadores (três comutadores em diante) e estamos ignorando completamente os problemas de convergência.

Utilizando a Fórmula de BCH para o nosso problema de rotações, vemos que

$$\begin{aligned} e^{\theta\mathcal{L}_x}e^{\phi\mathcal{L}_y} &= \exp\left(\theta\mathcal{L}_x + \phi\mathcal{L}_y + \frac{\theta\phi}{2}\mathcal{L}_z + \dots\right), \\ e^{\phi\mathcal{L}_y}e^{\theta\mathcal{L}_x} &= \exp\left(\theta\mathcal{L}_x + \phi\mathcal{L}_y - \frac{\theta\phi}{2}\mathcal{L}_z + \dots\right), \end{aligned} \quad (2.148)$$

\*Ou Fórmula de BCH, para os íntimos.

e portanto rotações finitas não comutam. Suponha, no entanto, que  $\phi$  e  $\theta$  sejam infinitesimais, de modo que termos proporcionais a  $\phi\theta$ ,  $\theta^2$  ou  $\phi^2$  sejam desprezíveis. Então

$$\begin{aligned} e^{\theta\mathcal{L}_x}e^{\phi\mathcal{L}_y} &= (1 + \theta\mathcal{L}_x + \mathcal{O}(\theta^2))(1 + \phi\mathcal{L}_y + \mathcal{O}(\phi^2)), \\ &= 1 + \theta\mathcal{L}_x + \phi\mathcal{L}_y, \end{aligned} \quad (2.149)$$

e da mesma maneira obtém-se

$$e^{\phi\mathcal{L}_y}e^{\theta\mathcal{L}_x} = 1 + \theta\mathcal{L}_x + \phi\mathcal{L}_y = e^{\theta\mathcal{L}_x}e^{\phi\mathcal{L}_y}. \quad (2.150)$$

Logo, rotações infinitesimais comutam, embora rotações finitas não o façam. Isso possui um significado interessante: não podemos definir um vetor deslocamento angular, pois se o fizéssemos, não teríamos  $\theta_x + \theta_y = \theta_y + \theta_x$ , visto que rotações finitas em torno de  $\hat{x}$  e em torno de  $\hat{y}$  não comutam. No entanto, como rotações infinitesimais comutam, podemos definir um vetor velocidade angular\*. ✠

Antes de prosseguirmos, é útil notarmos que transformações canônicas infinitesimais encontram uma descrição belíssima em termos de Geometria Diferencial, onde o operador de Lie  $\mathcal{L}_G$  passa a ser entendido como uma derivada de Lie na direção do campo vetorial Hamiltoniano induzido pela função escalar  $G$ . Na verdade, as formulações Lagrangeana e Hamiltoniana da Mecânica Clássica como um todo encontram uma descrição simples e rica na Geometria Diferencial. Aos interessados, algumas referências que tratam a Mecânica por esta abordagem são [5, 23, 26].

## 2.5.2 Leis de Conservação no Formalismo Hamiltoniano

O estudo de transformações canônicas nos permite abordar o Teorema de Noether de uma maneira incrivelmente simples.

Suponha que a Hamiltoniana  $H(q, p)$  seja invariante sob a transformação canônica infinitesimal gerada por uma função  $G(q, p)$ . Pelo Exercício 60, temos que

$$\mathcal{L}_G H = \{H, G\} = 0 \quad (2.151)$$

Como colchetes de Poisson anticomutam,

$$\{H, G\} = 0. \quad (2.152)$$

Assim,

$$\frac{dG}{dt} = 0. \quad (2.153)$$

---

\*O excelente livro [35] discute isso, mas sua demonstração, embora simples, é incorreta. Note que os argumentos utilizados para mostrar que rotações infinitesimais comutam (Seção 11.2) poderiam ser aplicados sem alteração para rotações finitas e conduzir ao resultado falso de que rotações finitas comutam. O problema está no autor ter feito implicitamente a hipótese de que o deslocamento angular infinitesimal é um vetor enquanto buscava provar que o deslocamento angular infinitesimal é um vetor.

### 2.5.3 Colchetes de Lagrange e Funções Geratrizes

Uma segunda ferramenta semelhante ao colchete de Poisson que se mostrará útil no estudo de transformações canônicas é o chamado colchete de Lagrange. Sejam  $q, p$  um conjunto de variáveis canônicas que depende de parâmetros  $u, v$  (por exemplo, o tempo, ou outro conjunto de variáveis canônicas). O colchete de Lagrange de  $u$  e  $v$  com relação a  $q, p$  é definido por

$$[u, v]_{q,p} = \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v} \frac{\partial p_i}{\partial u}. \quad (2.154)$$

#### Exercício 65:

Mostre que valem, para os colchetes de Lagrange, as seguintes relações:

- i.  $[u, v]_{q,p} = -[v, u]_{q,p}$ ;
- ii.  $[q_i, q_j]_{q,p} = 0$ ;
- iii.  $[p_i, p_j]_{q,p} = 0$ ;
- iv.  $[q_i, p_j]_{q,p} = \delta_{ij}$ . ✖

#### Exercício 66:

Denotemos, como usual,  $\mathbf{x} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^\top$ . Mostre que

$$[u, v]_{q,p} = \frac{\partial \mathbf{x}^\top}{\partial u} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}. \quad (2.155)$$

✖

#### Teorema:

Uma transformação das variáveis canônicas  $q, p \rightarrow Q(q, p, t), P(q, p, t)$  é uma transformação canônica se, e somente se,

$$[q_i, q_j]_{Q,P} = 0, \quad [p_i, p_j]_{Q,P} = 0, \quad [q_i, p_j]_{Q,P} = \delta_{ij} \quad (2.156)$$

para todo par de índices  $i$  e  $j$  e todo instante de tempo fixo  $t$ . □

*Demonstração:*

Começemos assumindo que  $q, p \rightarrow Q(q, p, t), P(q, p, t)$  é canônica. Denotamos, como usualmente,  $\mathbf{x} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^\top$  e  $\mathbf{y} = (Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)^\top$ .

Pelo Exercício 66 e pela regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} [u, v]_{q,p} &= \frac{\partial \mathbf{x}^\top}{\partial u} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, \\ &= \frac{\partial \mathbf{y}^\top}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{x}^\top}{\partial \mathbf{y}} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v}. \end{aligned} \quad (2.157)$$

Pela Eq. (2.123),

$$\begin{aligned} [u, v]_{q,p} &= \frac{\partial \mathbf{y}^\top}{\partial u} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v}, \\ &= [u, v]_{Q,P}. \end{aligned} \quad (2.158)$$

Assim, os colchetes de Lagrange são invariantes sob transformações canônicas, e vemos do Exercício 65 que

$$[q_i, q_j]_{Q,P} = 0, \quad [p_i, p_j]_{Q,P} = 0, \quad [q_i, p_j]_{Q,P} = \delta_{ij}. \quad (2.159)$$

Resta provarmos o contrário. Assumindo que valem os colchetes fundamentais dados na Eq. (2.156), queremos provar que  $q, p \rightarrow Q, P$  é transformação canônica.

Note que podemos escrever a Eq. (2.156) de forma compacta como

$$[x_i, x_j]_{Q,P} = \mathbb{J}_{ij}. \quad (2.160)$$

Usando o Exercício 66,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{y}^\top}{\partial x_i} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_j} &= \mathbb{J}_{ij}, \\ \frac{\partial \mathbf{y}^\top}{\partial \mathbf{x}} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbb{J}. \end{aligned} \quad (2.161)$$

Logo, a matriz Jacobiana da transformação é simplética, e concluímos que a transformação é canônica. ■

A primeira vantagem deste resultado é nos fornecer um novo método para testar se transformações são canônicas. Em algumas situações, pode ser mais simples analisar se o Jacobiano é simplético. Em outros casos, é mais simples analisar os colchetes de Poisson, e em outros pode ser mais simples analisar os colchetes de Lagrange. Contudo, os colchetes de Lagrange possuem um interesse a mais no nosso caso.

**Exercício 67:**

Usando o fato de que uma transformação  $q, p \rightarrow Q(q, p, t), P(q, p, t)$  é canônica se, e somente se, satisfizer a Eq. (2.156), mostre que  $q, p \rightarrow Q, P$  é canônica se, e somente se, valerem

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left( \sum_k P_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} - p_j \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_k P_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} - p_i \right), \quad (2.162)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left( \sum_k P_k \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} \right) = \frac{\partial}{\partial p_j} \left( \sum_k P_k \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \right), \quad (2.163)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left( \sum_k P_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} - p_j \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_k P_k \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \right). \quad (2.164) \quad \text{✚}$$

A Eq. (2.162) será válida se, e somente se, houver uma função  $W_1$  tal que

$$\sum_k P_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} - p_i = \frac{\partial W_1}{\partial q_i}. \quad (2.165)$$

De modo análogo, a Eq. (2.163) equivale à existência de uma função  $W_2$  tal que

$$\sum_k P_k \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} = \frac{\partial W_2}{\partial p_i}. \quad (2.166)$$

Por fim, a Eq. (2.164) fornece que  $W_1 = W_2 \equiv W$ . Note que como a Eq. (2.156) vale para um instante de tempo fixo, todas estas expressões se referem a derivações mantendo o instante de tempo fixo, e devemos considerar que  $W$  admite dependência temporal.

Vemos pois que, para um instante de tempo fixo,

$$\begin{aligned} dW &= \sum_i \left( \sum_k P_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} - p_i \right) dq_i + \sum_i \left( \sum_k P_k \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \right) dp_i, \\ &= \sum_k P_k \left( \sum_i \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} dp_i \right) - \sum_i p_i dq_i, \\ &= \sum_i P_i dQ_i - p_i dq_i. \end{aligned} \quad (2.167)$$

Ao permitir variação temporal, temos então

$$dW = \sum_i P_i dQ_i - p_i dq_i - R dt. \quad (2.168)$$

Isto nos permite caracterizar a transformação canônica em termos de  $W$ , que é chamada de função geratriz. Temos que

$$P_i = \frac{\partial W}{\partial Q_i}, \quad p_i = -\frac{\partial W}{\partial q_i}. \quad (2.169)$$

Resta entendermos o que é  $R$  na Eq. (2.168). Tomemos  $Q, P, t$  como variáveis independentes. Temos

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\sum_k p_k \frac{\partial q_k}{\partial t} - R, \quad \frac{\partial W}{\partial Q_i} = P_i - \sum_k p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_i}, \quad \frac{\partial W}{\partial P_i} = -\sum_k p_k \frac{\partial q_k}{\partial P_i}. \quad (2.170)$$

#### Exercício 68:

Utilize a Eq. (2.170) e os fatos de que  $\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial Q_i} = \frac{\partial^2 W}{\partial Q_i \partial t}$  e  $\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial P_i} = \frac{\partial^2 W}{\partial P_i \partial t}$  para obter que

$$[Q_i, t] = \frac{\partial R}{\partial Q_i}, \quad [P_i, t] = \frac{\partial R}{\partial P_i}. \quad (2.171)$$

✚

Dos Exercícios 66 e 68 temos que

$$\frac{\partial R}{\partial Q_i} = \frac{\partial \mathbf{x}^\top}{\partial Q_i} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}, \quad \frac{\partial R}{\partial P_i} = \frac{\partial \mathbf{x}^\top}{\partial P_i} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}. \quad (2.172)$$

Podemos combinar as duas expressões numa só ao escrever

$$\frac{\partial R}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{x}^\top}{\partial \mathbf{y}} \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}. \quad (2.173)$$

Recordando a Eq. (2.114), concluímos que

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbb{J} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} (H + R). \quad (2.174)$$

Pela Eq. (2.110) vemos que

$$K = H + R. \quad (2.175)$$

Unindo esta informação à Eq. (2.168), vemos que

$$dW = \sum_i P_i dQ_i - p_i dq_i + (H - K) dt. \quad (2.176)$$

Desta forma, dada uma função  $W(q, Q, t)$  podemos obter uma transformação canônica por meio das expressões

$$P_i = \left( \frac{\partial W}{\partial Q_i} \right)_{Q_j(j \neq i), q, t}, \quad p_i = - \left( \frac{\partial W}{\partial q_i} \right)_{q_j(j \neq i), Q, t}, \quad K = H - \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{Q, q}. \quad (2.177)$$

Note que o sinal é uma convenção, e podemos escolher o oposto sem punição. Em geral, preferimos denotar  $F_1 \equiv -W$ , de modo que

$$dF_1 = \sum_i p_i dq_i - P_i dQ_i + (K - H) dt \quad (2.178)$$

e

$$p_i = + \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \right)_{q_j(j \neq i), Q, t}, \quad P_i = - \left( \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \right)_{Q_j(j \neq i), q, t}, \quad K = H + \left( \frac{\partial F_1}{\partial t} \right)_{Q, q}. \quad (2.179)$$

O índice 1 não é acidental. Chamamos funções geratrizes da forma  $F_1(q, Q, t)$  de funções geratrizes do tipo 1. Podemos fazer transformações de Legendre para obter outros tipos de funções geratrizes. Por exemplo, suponha que queiramos uma função geratriz da forma  $F_2(q, P, t)$ . Então notamos que

$$\begin{aligned} d \left( F_1 + \sum_i P_i Q_i \right) &= \sum_i p_i dq_i - P_i dQ_i + P_i dQ_i + Q_i dP_i + (K - H) dt, \\ dF_2 &= \sum_i p_i dq_i + Q_i dP_i + (K - H) dt, \end{aligned} \quad (2.180)$$

onde definimos a função geratriz do segundo tipo

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q(q, P, t), t) + \sum_i P_i Q_i(q, P, t), \quad (2.181)$$

que satisfaz

$$p_i = + \left( \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right)_{q_j(j \neq i), P, t}, \quad Q_i = \left( \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \right)_{P_j(j \neq i), q, t}, \quad K = H + \left( \frac{\partial F_2}{\partial t} \right)_{P, q}. \quad (2.182)$$

### Exercício 69:

Por meio de transformações de Legendre, obtenha as funções geratrizes do terceiro e quarto tipos, que satisfazem

$$q_i = - \left( \frac{\partial F_3}{\partial p_i} \right)_{p_j(j \neq i), Q, t}, \quad P_i = - \left( \frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \right)_{Q_j(j \neq i), p, t}, \quad K = H + \left( \frac{\partial F_3}{\partial t} \right)_{Q, p}. \quad (2.183)$$

e

$$q_i = - \left( \frac{\partial F_4}{\partial p_i} \right)_{p_j(j \neq i), P, t}, \quad Q_i = \left( \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \right)_{P_j(j \neq i), p, t}, \quad K = H + \left( \frac{\partial F_4}{\partial t} \right)_{P, p}. \quad (2.184) \quad \text{✘}$$

Note que, para sistemas com mais de um grau de liberdade, não há problema algum em ter funções geratrizes mistas, como  $F(q_1, P_1, p_1, Q_2, t)$ . Basta atentar-se ao sinais em frente às derivadas.

Uma transformação é canônica se, e somente se, admitir alguma função geratriz. De fato, alguns autores – como [16, 27, 29] – preferem definir transformações canônicas por esta abordagem. A abordagem que seguimos se assemelha mais à tomada por [32, 47], que enfatiza que as transformações canônicas preservam – na linguagem da Geometria Diferencial – uma forma simplética, aqui representada pela matriz  $\mathbb{J}$ .

Contudo, nem toda transformação canônica admite funções geratrizes de qualquer tipo.

**Exercício 70:**

Mostre que a função geratriz

$$F_2(q, P, t) = \sum_i P_i q_i \quad (2.185)$$

gera a transformação canônica

$$p_i = P_i, \quad q_i = Q_i, \quad K = H. \quad (2.186)$$



A transformação identidade não admite uma função geratriz do tipo 1, por exemplo, pois ela não permite que tomemos  $q$  e  $Q$  como variáveis independentes.

**Exercício 71:**

Obtenha a transformação canônica descrita pela função geratriz

$$F_1(q, Q, t) = \sum_i q_i Q_i. \quad (2.187)$$



O Exercício (71) ilustra que, do ponto de vista da Mecânica Hamiltoniana, momento e coordenada são equivalentes, e podemos trocar um pelo outro sob o custo de um sinal.

**2.5.4 Oscilador Harmônico Simples e Transformações Canônicas**

Um excelente teste de todo novo formalismo que desenvolvemos é resolver uma nova vez o oscilador harmônico. Tomemos mais uma vez sua Hamiltoniana. Inserindo  $k = m\omega^2$  ainda na Hamiltoniana por simplicidade, temos

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}. \quad (2.188)$$

Notando que as dimensões de  $q$  e  $p$  são  $[q] = L$  e  $[p] = MLT^{-1}$ , escolhemos unidades com  $m = \omega = 1$ . Podemos fazer isso, pois  $[m] = M$  e  $[\omega] = T^{-1}$ , de modo que é possível fixar as duas constantes de maneira independente. Assim,

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}. \quad (2.189)$$

Faremos uma transformação canônica por tentativa e erro. Uma forma conveniente para a Hamiltoniana seria uma partícula livre, e portanto gostaríamos que

$$H(Q, P, t) = \frac{P^2}{2}, \quad (2.190)$$

que pode ser obtido considerando a transformação

$$p = P \sin Q, \quad q = P \cos Q. \quad (2.191)$$

**Exercício 72:**

Mostre que a transformação dada na Eq. (2.191) não é canônica. ❌

Uma das formas de solucionar o Exercício (72) é mostrando que  $[Q, P]_{q,p} = -P$ , e portanto nossa tentativa de transformação canônica rende um sinal errado e um momento a mais do que deveria. Tentemos então obter algo que não seja uma partícula livre, mas que forneça uma dinâmica simples. Como queremos remover um momento, tentamos

$$H(Q, P, t) = P, \quad (2.192)$$

que pode ser obtido com a transformação

$$p = \sqrt{2P} \sin Q, \quad q = \sqrt{2P} \cos Q. \quad (2.193)$$

Contudo, vimos que há um sinal errado em nossa transformação. Podemos corrigir este sinal ao trocar  $\sin Q$  e  $\cos Q$  na nossa tentativa de transformação e escrever

$$p = \sqrt{2P} \cos Q, \quad q = \sqrt{2P} \sin Q. \quad (2.194)$$

**Exercício 73:**

Mostre que a transformação dada na Eq. (2.193) não é canônica, mas que a dada na Eq. (2.194) é. ❌

Assim, consideremos a transformação canônica dada na Eq. (2.194). A nova Hamiltoniana é

$$H(Q, P, t) = P, \quad (2.195)$$

e as equações canônicas se tornaram

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0, \quad \dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = 1, \quad (2.196)$$

que, ao serem integradas, levam a

$$P(t) = P_0, \quad Q(t) = Q_0 + t, \quad (2.197)$$

onde  $P_0 \equiv P(0)$  e  $Q_0 \equiv Q(0)$ . Utilizando a transformação da Eq. (2.194), vemos que nas coordenadas originais temos

$$p(t) = \sqrt{2P_0} \cos(Q_0 + t), \quad q(t) = \sqrt{2P_0} \sin(Q_0 + t). \quad (2.198)$$

É conveniente expressarmos as soluções em termos de  $q_0 \equiv q(0)$  e  $p_0 \equiv p(0)$ , ao invés de  $Q_0$  e  $P_0$ . Um pouco de álgebra e trigonometria fornece que

$$P_0 = \frac{p_0^2}{2} + \frac{q_0^2}{2}, \quad Q_0 = \arctan\left(\frac{q_0}{p_0}\right). \quad (2.199)$$

Logo,

$$\begin{aligned} q(t) &= \sqrt{p_0^2 + q_0^2} \sin\left(\arctan\left(\frac{q_0}{p_0}\right) + t\right), \\ &= \sqrt{p_0^2 + q_0^2} \sin\left(\arctan\left(\frac{q_0}{p_0}\right)\right) \cos t + \sqrt{p_0^2 + q_0^2} \cos\left(\arctan\left(\frac{q_0}{p_0}\right)\right) \sin t, \\ &= q_0 \cos t + p_0 \sin t. \end{aligned} \quad (2.200)$$

Podemos agora restaurar as unidades arbitrárias por análise dimensional.  $q_0$  e  $q(t)$  já possuem a mesma dimensão –  $[q] = L$  –, e portanto não devemos nos preocupar com o coeficiente do primeiro termo.  $[p_0] = MLT^{-1}$ , e portanto deve ser multiplicado por uma constante com dimensões  $M^{-1}T$ . A única combinação de  $\omega$  e  $m$  com esta dimensão é  $(m\omega)^{-1}$ . Por fim, os argumentos de senos e cossenos são ângulos, e portanto adimensionais. Como  $[t] = T$ , devemos multiplicá-lo por uma constante com dimensão  $T^{-1}$ . A única opção é  $\omega$ . Assim,

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t), \quad (2.201)$$

que é precisamente a mesma expressão que obtivemos com os colchetes de Poisson (Eq. (2.81)).

### 2.5.5 Método de Euler-Cromer

O conhecimento da teoria das transformações canônicas e do fato de que a evolução temporal é uma transformação canônica nos permite enxergar sob um novo ângulo a integração numérica das equações de movimento de sistemas Hamiltonianos. Esta seção é apenas um esboço sobre como transformações canônicas podem ser interessantes do ponto de vista computacional, e tratamentos mais profundos sobre métodos numéricos podem ser encontrados em [7, 49]. Em particular, uma discussão acerca de integradores simpléticos que serviu de referência para esta seção foi [51].

Consideremos mais uma vez a Hamiltoniana do oscilador harmônico simples, tomando de antemão  $m = \omega = 1$ .

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}. \quad (2.202)$$

As equações canônicas fornecem

$$\dot{p} = -q, \quad \dot{q} = p. \quad (2.203)$$

**Exercício 74:**

Utilize as Eqs. (2.201) e (2.203) para escrever a evolução temporal do oscilador harmônico simples como

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}. \quad (2.204)$$

Mostre que a matriz da equação anterior é o Jacobiano da transformação  $q_0, p_0 \rightarrow q(t), p(t)$  e, portanto, que é simplética. ✖

Utilizaremos o oscilador harmônico, cuja solução conhecemos, como forma de testar o método de Euler, que já discutimos no Apêndice A e ao estudar o espaço de fases.

Para o oscilador harmônico em formulação Hamiltoniana, temos

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + p_n \Delta t, \\ p_{n+1} &= p_n - q_n \Delta t. \end{aligned} \quad (2.205)$$

Ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ -\Delta t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix}. \quad (2.206)$$

**Exercício 75:**

Mostre que a evolução descrita pela Eq. (2.206) não é uma transformação canônica. ✖

O fato do método numérico não ser canônico indica um problema em comparação com a evolução temporal usual: se a evolução temporal é canônica, mas o algoritmo não, então o próprio algoritmo introduz erros na aproximação numérica devido ao fato de não condizer com a estrutura da Mecânica Hamiltoniana.

Há um segundo problema ainda: o método de Euler não conserva a energia do oscilador harmônico.

**Exercício 76:**

Mostre que, para o oscilador harmônico, a energia – que coincide com a Hamiltoniana – pode ser escrita como

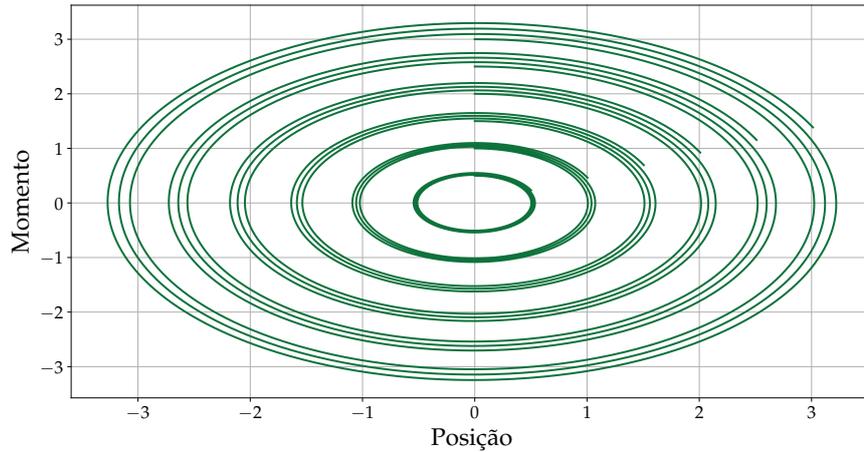
$$E = \frac{1}{2} (q \ p) \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}. \quad (2.207)$$

Utilizando este resultado, mostre que, para o método de Euler, a energia após  $n + 1$  iterações é dada em função da energia após  $n$  iterações por

$$E_{n+1} = (1 + \Delta t^2) E_n. \quad (2.208)$$

✖

Assim, vemos que o próprio algoritmo faz com que as energias cresçam com a evolução temporal. A Figura 12 ilustra o retrato de fase do oscilador harmônico simples calculado



**Figura 12.** Retrato de fase calculado via método de Euler para o oscilador harmônico simples em unidades com  $m = \omega = 1$  e passo  $\Delta t = 0.01$ . O código em Python utilizado para gerar o gráfico está disponibilizado no Subapêndice B.3.

com o método de Euler para um passo  $\Delta t = 0.01$  e unidades com  $m = \omega = 1$ . O código em Python utilizado está disponibilizado no Subapêndice B.3. Perceba que as trajetórias no espaço de fase espiralam, ao invés de permanecer nas elipses de energia constante.

Naturalmente, gostaríamos de usar algoritmos numéricos que consistam de transformações canônicas e conservem a energia. É impossível obter um algoritmo que satisfaça as duas exigências para todos os sistemas Hamiltonianos[51]. Focaremos pois em obter um integrador simplético: um algoritmo cuja evolução seja uma transformação canônica.

Como desejamos obter uma transformação que forneça  $q_{n+1}$  e  $p_{n+1}$  a partir de correções a  $q_n$  e  $p_n$ , podemos começar considerando a função geratriz que gera a transformação identidade, discutida no Exercício 70. Como a correção deve ser\* proporcional a  $\Delta t$ , queremos uma função geratriz com a forma

$$F(q, P, t) = qP + \Delta t f(q, P, t). \quad (2.209)$$

Esta função geratriz nos conduz à transformação

$$Q = \frac{\partial F}{\partial P} = q + \Delta t \frac{\partial f}{\partial P}, \quad p = P + \Delta t \frac{\partial f}{\partial q}. \quad (2.210)$$

Note que

$$\frac{Q - q}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial P}, \quad \frac{P - p}{\Delta t} = -\frac{\partial f}{\partial q}. \quad (2.211)$$

---

\*No caso, estamos considerando um método que seja semelhante ao método de Euler. Métodos numéricos mais sofisticados podem depender de potências maiores de  $\Delta t$  de modo a minimizar os erros.

Sabemos que tomaremos  $P = p_{n+1}$  e  $p = p_n$ , com expressões análogas para  $q$  e  $Q$ . Assim,

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial P}, \quad \frac{\Delta p}{\Delta t} = -\frac{\partial f}{\partial q}. \quad (2.212)$$

A semelhança com as equações canônicas nos conduz à escolha

$$F(q, P, t) = qP + \Delta t H(q, P, t), \quad (2.213)$$

que fornece as equações

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \frac{\partial H}{\partial p}(q_n, p_{n+1}, t), \quad p_{n+1} = p_n - \Delta t \frac{\partial H}{\partial q}(q_n, p_{n+1}, t). \quad (2.214)$$

Visto que a transformação foi deduzida a partir de uma função geratriz, ela certamente é canônica. Note que a expressão para  $p_{n+1}$  depende de  $p_{n+1}$ , e portanto sua implementação no caso geral envolve resolver uma equação implícita para  $p_{n+1}$ . Contudo, para Hamiltonianas ditas separáveis, que tem a forma

$$H(q, p) = U(q) + V(p), \quad (2.215)$$

a expressão para  $p_{n+1}$  é explícita.

No caso do oscilador harmônico, temos

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + p_{n+1} \Delta t, \\ p_{n+1} &= p_n - q_n \Delta t. \end{aligned} \quad (2.216)$$

Em forma matricial,

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \Delta t^2 & \Delta t \\ -\Delta t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix}. \quad (2.217)$$

#### Exercício 77:

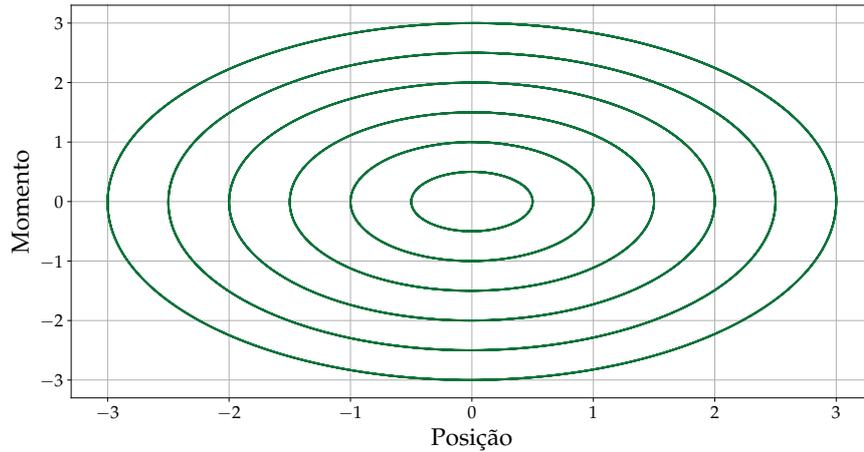
Verifique que a evolução descrita pela Eq. (2.217) é uma transformação canônica.

Mostre que a evolução da energia se dá segundo

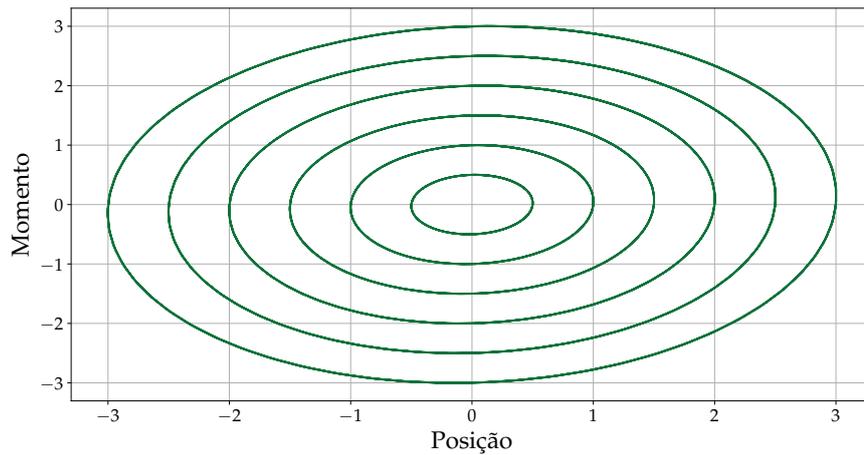
$$E_{n+1} = E_n + \Delta t^2 (p_n^2 - q_n^2 - 2\Delta t p_n q_n + \Delta t^2 q_n^2). \quad (2.218)$$



Note que a energia não mais cresce indefinidamente: a expressão para a correção é tal que o erro é cíclico ao longo do oscilador harmônico e, em média, a energia é conservada. Isso é demonstrado em [10], trabalho este que rendeu ao método o nome de método de Euler-Cromer. As Figuras 13, 14 e 15 exibem o retrato de fases do pêndulo simples calculado com o método de Euler-Cromer em unidades com  $m = \omega = 1$  para passos  $\Delta t = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.1$  e  $\Delta t = 1$ . Note que, embora a trajetória não se mantenha sempre sobre as elipses de energia constante, as curvas ainda são fechadas. O erro na energia não é nulo, mas no sistema oscilatório o erro médio é nulo.



**Figura 13.** Retrato de fase calculado via método de Euler-Cromer para o oscilador harmônico simples em unidades com  $m = \omega = 1$  e passo  $\Delta t = 0.01$ . O código em Python utilizado para gerar o gráfico está disponibilizado no Subapêndice [B.4](#).



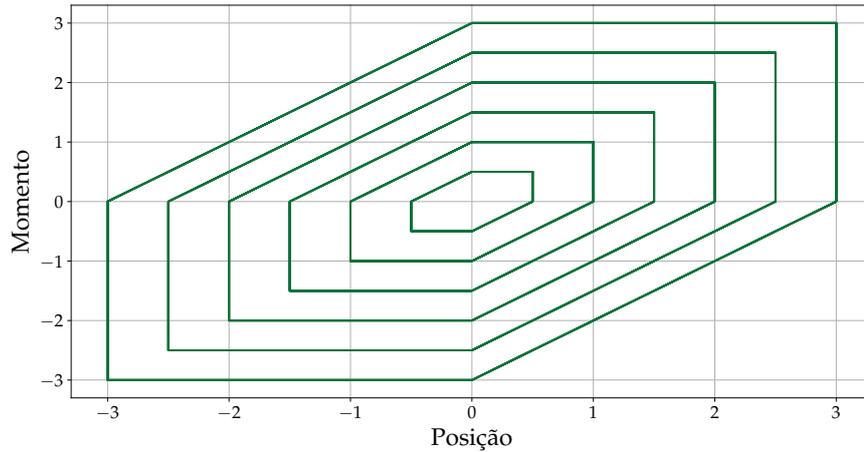
**Figura 14.** Retrato de fase calculado via método de Euler-Cromer para o oscilador harmônico simples em unidades com  $m = \omega = 1$  e passo  $\Delta t = 0.1$ . O código em Python utilizado para gerar o gráfico está disponibilizado no Subapêndice [B.4](#), bastando trocar  $dt = 0.01$  por  $dt = 0.1$  na definição da função `main`.

## 2.A Exercícios Complementares

### Exercício 78 [Teorema de Liouville]:

Seja  $x \rightarrow y(x)$  uma transformação canônica. Mostre que  $\left| \det \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right| = 1$ . É útil notar que  $-\mathbb{J}^2 = \mathbb{1}$ .

Sabemos que a mudança de variáveis  $x \rightarrow y(x)$  numa integral para funções de uma



**Figura 15.** Retrato de fase calculado via método de Euler-Cromer para o oscilador harmônico simples em unidades com  $m = \omega = 1$  e passo  $\Delta t = 1$ . O código em Python utilizado para gerar o gráfico está disponibilizado no Subapêndice B.4, bastando trocar  $dt = 0.01$  por  $dt = 1$  na definição da função `main`.

variável real é dada por

$$\int_{y(a)}^{y(b)} f(y) dy = \int_a^b (f \circ \mathbf{y})(x) \frac{dy}{dx} dx. \quad (2.219)$$

Para várias variáveis, um resultado semelhante é válido[31, 44]:

$$\int_{\mathbf{y}(A)} f(\mathbf{y}) d^{2n}y = \int_A (f \circ \mathbf{y})(\mathbf{x}) \left| \det \left( \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}} \right) \right| d^{2n}x. \quad (2.220)$$

Como transformações canônicas tem  $\left| \det \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right| = 1$ , segue que elas preservam o volume no espaço de fases, *i.e.*, o volume no espaço de fase que um conjunto  $A$  ocupa antes da transformação é o mesmo volume que  $\mathbf{y}(A)$ , a imagem de  $A$  pela transformação, ocupa.

De fato, podemos ver isso tomando outra analogia com o Cálculo de uma variável. O comprimento de um intervalo  $[a, b]$  pode ser escrito como

$$b - a = \int_a^b dx. \quad (2.221)$$

De modo análogo, o volume dum conjunto  $A$  num espaço  $2n$ -dimensional é

$$V(A) = \int_A d^{2n}x. \quad (2.222)$$

Utilizando a Eq. (2.220) com a função  $f$  sendo constante e igual a 1, temos, para uma transformação canônica,

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{y}(A)) &= \int_{\mathbf{y}(A)} d^{2n}y, \\
 &= \int_A \left| \det \left( \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}} \right) \right| d^{2n}x, \\
 &= \int_A d^{2n}x, \\
 &= V(A).
 \end{aligned} \tag{2.223}$$

Este resultado é conhecido como Teorema de Liouville. ✠

**Exercício 79** [Teoria Cinética e o Teorema de Liouville]:

Considere como sistema físico um gás com  $N$  partículas descrito por uma Hamiltoniana  $H(q, p, t)$ . O espaço de fases possui  $6N$  dimensões. Cada ponto no espaço de fases é dito ser um microestado do sistema.

Usualmente, um gás possui cerca de  $N = 6 \times 10^{23}$  partículas, e portanto há  $3.6 \times 10^{24}$  equações diferenciais acopladas para serem resolvidas. Mesmo que fôssemos capazes de o fazer, o resultado seria tão complicado que não teríamos maneira de interpretá-lo. Resta-nos tratar o problema de maneira estatística.

Macroscopicamente, sabemos que podemos caracterizar o gás utilizando algumas poucas grandezas, como temperatura  $\Theta$ , volume  $V$ , pressão  $P$ , energia interna  $U$ , etc. Um gás ideal, por exemplo, pode ser caracterizado em termos macroscópicos em termos de sua temperatura, volume e número de partículas. Cada tripla  $(\Theta, V, N)$  define então um macroestado do sistema. Naturalmente, a um mesmo macroestado podem corresponder diversos microestados.

Suponha que no espaço de fases haja  $\mathcal{N}$  microestados associado a um certo macroestado. Seja  $d\mathcal{N}(\mathbf{x}, t)$  o número de microestados associados a este macroestado que, no instante  $t$ , estejam localizados num volume  $d^{2n}x$  ao redor de  $\mathbf{x}$ . Definimos a densidade do espaço de fases  $\rho(\mathbf{x}, t)$  por

$$\rho(\mathbf{x}, t) d^{2n}x = \lim_{\mathcal{N} \rightarrow +\infty} \frac{d\mathcal{N}(\mathbf{x}, t)}{\mathcal{N}}. \tag{2.224}$$

$\rho(\mathbf{x}, t)$  pode ser interpretada como uma função densidade de probabilidade no espaço de fases. Dado um macroestado,  $\rho(\mathbf{x}, t) d^{2n}x$  descreve a probabilidade de que, no instante de tempo  $t$ , o microestado do sistema esteja no volume  $d^{2n}x$  em torno de  $\mathbf{x}$ . Note que a integral de  $\rho(\mathbf{x}, t)$  em todo o espaço de fases resulta em 1:

$$\begin{aligned}
 \int \rho(\mathbf{x}, t) d^{2n}x &= \int \lim_{\mathcal{N} \rightarrow +\infty} \frac{d\mathcal{N}(\mathbf{x}, t)}{\mathcal{N}}, \\
 &= \lim_{\mathcal{N} \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mathcal{N}} \int d\mathcal{N}(\mathbf{x}, t), \\
 &= \lim_{\mathcal{N} \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mathcal{N}} \mathcal{N}, \\
 &= 1.
 \end{aligned} \tag{2.225}$$

Utilize o Teorema de Liouville, discutido no Exercício 78, e o fato de que a evolução temporal é uma transformação canônica para concluir que

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (2.226)$$

O argumento é qualitativo. ✚

**Exercício 80** [Espaço de Momentos]:

Conforme mencionamos, a Mecânica Hamiltoniana ressalta o fato de que trabalharmos em termos de posições ou em termos de momentos são procedimentos equivalentes. Por isso, é por vezes muito conveniente em Mecânica Quântica escolhermos trabalhar no espaço de momentos ao invés de no espaço de posições. Este problema, motivado pela discussão em [20], aborda este fato no contexto da Mecânica Clássica, particularmente no formalismo Lagrangeano.

Tome a “dupla transformação de Legendre” dada por

$$K(p, \dot{p}, t) = L(q, \dot{q}, t) - \sum_i p_i \dot{q}_i - \dot{p}_i q_i, \quad (2.227)$$

onde  $p_i$  é o momento canonicamente conjugado a  $q_i$ . Chamamos  $K$  de Lagrangeana no espaço de momentos. Para justificar este nome, argumente que  $K$  e  $L$  precisam ser dinamicamente equivalentes e mostre que

$$\frac{\partial K}{\partial p_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{p}_i} \right) = 0. \quad (2.228)$$

Embora sejam dinamicamente equivalentes, é perceptível que  $K$  e  $L$  são qualitativamente distintas. Quais diferenças conceituais ocorreriam se deduzíssemos as equações de Euler-Lagrange para  $K$  a partir de um princípio variacional? Pense em termos de condições iniciais e de contorno.

Obtenha a Lagrangeana no espaço de momentos para um oscilador harmônico simples.

Obtenha a Lagrangeana no espaço de momentos para uma partícula em queda livre num campo gravitacional com aceleração  $g$ . A Lagrangeana no espaço de posições é

$$L(z, \dot{z}, t) = \frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz. \quad (2.229)$$

Para tal, é útil adicionar uma derivada total do tempo (como  $\dot{z}\dot{z}$ ) à Lagrangeana. Após obter a Lagrangeana no espaço de momentos, mostre que as duas formulações (no espaço de posições e no espaço de momentos) fornecem os mesmos resultados.

É um bom momento para mencionar que o problema com a transformada de Legendre envolvendo a variável  $z$  está associado ao fato de que a Lagrangeana como escrita na Eq. (2.229) não é uma função convexa, o que leva a problemas com a boa definição da transformada de Legendre. As referências [5, 54] discutem estes assuntos com um bom nível de detalhe.

Dum outro ponto de vista, o determinante da matriz Hessiana, dada por

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z} \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \end{pmatrix}, \quad (2.230)$$

se anula para a Lagrangeana escrita na Eq. (2.229). Isso implica que o chamado Teorema da Função Implícita[31, 44] não é válido e não há garantia de que poderemos escrever  $z$  e  $\dot{z}$  como funções de  $p$  e  $\dot{p}$ . Adicionar o termo  $z\dot{z}$ , que não altera a dinâmica, faz com que o determinante da matriz Hessiana não mais seja nulo, o Teorema da Função Implícita volta a valer e podemos prosseguir como usualmente.

Estes problemas podem parecer tolos e artificiais. Não poderíamos evitá-los simplesmente trabalhando no espaço de posições? No caso Lagrangeano, em geral sim. Mas por vezes queremos estudar sistemas Hamiltonianos com vínculos que apresentam problemas semelhantes (os vínculos fazem com que a matriz Hessiana tenha determinante nulo) e é preciso desenvolver uma teoria para abordar estes assuntos. Dirac desenvolveu a teoria Hamiltoniana de sistemas vinculados, e exposições deste assunto podem ser encontradas em [11, 29].

Claro, você pode se perguntar porque alguém estaria interessado em sistemas Hamiltonianos vinculados. Um exemplo de problema deste tipo é possivelmente o maior problema em aberto da Física Teórica: a quantização da Gravitação. Uma das principais formas de se quantizar uma teoria é por meio da chamada quantização canônica, que utiliza os colchetes de Poisson para obter algumas das propriedades que a teoria quantizada precisa apresentar\*. Assim, é interessante expressar teorias numa forma Hamiltoniana para quantizá-las por meio dos colchetes de Poisson. A Relatividade Geral, contudo, é uma teoria com vínculos, e portanto necessita destes cuidados especiais†.

Ainda resta uma pergunta em aberto: por que alguém se importaria em descrever fenômenos no espaço de momentos ao invés de lidar com o espaço de posições? Simples: nem sempre estamos interessados nas posições.

Imagine, por exemplo, que você está estudando Física de Altas Energias, que é apenas outro nome para a Física de Partículas Elementares. Você pode estar querendo analisar o que ocorre ao colidir dois prótons, por exemplo, e neste caso pouco lhe interessam as posições iniciais dos prótons. Os momentos são muito mais interessantes, pois queremos colidir prótons extremamente energéticos. Se nossas condições iniciais são mais facilmente expressas em termos de momentos, escolhemos uma descrição em termos de momentos.



### Exercício 81 [Grupo Simplético]:

Mencionamos no Exercício 6 a definição de um grupo. A reiteraremos aqui.

Seja  $G$  um conjunto equipado com uma operação  $\cdot : G \times G \rightarrow G$ . Por exemplo, podemos ter um conjunto de matrizes equipado com o produto usual de matrizes. Dizemos que o par  $(G, \cdot)$  é um grupo se valerem as seguintes propriedades:

---

\*Duas variáveis mecânicas  $f$  e  $g$ , ao serem quantizadas canonicamente, se tornam operadores  $\hat{f}$  e  $\hat{g}$  satisfazendo  $[\hat{f}, \hat{g}] = i\hbar\{f, g\}$ , onde  $[A, B] = AB - BA$  é o comutador[12].

†Aos interessados, recomendo as aulas sobre Gravitação Canônica (aulas 18 e 19) de [43].

- i.  $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ , para quaisquer  $g_1, g_2, g_3 \in G$  (associatividade);
- ii. existe um elemento  $e \in G$  tal que  $g \cdot e = e \cdot g = g$ , para todo  $g \in G$  (existência de elemento neutro);
- iii. para todo  $g \in G$ , existe  $g^* \in G$  tal que  $g \cdot g^* = g^* \cdot g = e$  (existência de inverso).

Considere o conjunto

$$\text{Sp}(2n, \mathbb{R}) \equiv \{M \in \mathbb{M}_{2n}(\mathbb{R}); M\mathbb{J}M^T = \mathbb{J}\}, \quad (2.231)$$

onde  $\mathbb{J}$  é a matriz simplética  $2n \times 2n$ ,

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.232)$$

Mostre que  $(\text{Sp}(2n, \mathbb{R}), \cdot)$ , onde  $\cdot$  é o produto usual de matrizes, é um grupo. Note que como o produto usual de matrizes é sabidamente associativo, não é preciso mostrar a associatividade. Contudo, é preciso mostrar que o produto de matrizes simpléticas é uma matriz simplética, mostrar que a identidade é uma matriz simplética e mostrar que toda matriz simplética tem inversa simplética (em particular, isso inclui mostrar que toda matriz simplética é inversível).  $(\text{Sp}(2n, \mathbb{R}), \cdot)$  é conhecido como o grupo simplético real sobre  $\mathbb{R}^{2n}$ .

É notável a semelhança entre as definições do grupo simplético, e, por exemplo o grupo de Lorentz, que ocorre em Relatividade Restrita\*.

O fato de que toda matriz simplética é inversível implica que o Teorema da Inversa[31, 44] é sempre válido para transformações canônicas suficientemente diferenciáveis. A regra da cadeia, é possível concluir que as transformações canônicas também constituem um grupo, com produto dado pela composição de transformações. ❖

### 3 Teoria de Hamilton-Jacobi

#### 3.1 Equação de Hamilton-Jacobi

O poder das transformações canônicas nos permite tomar sistemas consideravelmente complicados e torná-los simples, mas exige uma boa porção de intuição e adivinhação. A chamada Teoria de Hamilton-Jacobi nos permitirá agora obter um procedimento para a obtenção de uma transformação canônica que trivialize o sistema, e é por vezes considerada o ápice da Mecânica Clássica.

Começemos discutindo sobre qual é o nosso objetivo ao utilizar transformações canônicas. Essencialmente todos os sistemas mecânicos com os quais lidamos poderiam ser resolvidos estudando apenas as equações de Newton, mas convenhamos que isso seria, no mínimo, triste. Vimos que os formalismos Lagrangeano e Hamiltoniano são capazes de simplificar consideravelmente as descrições dos sistemas mecânicos ao introduzir ferramentas mais sofisticadas, mas que frequentemente facilitam os cálculos.

---

\*Para um texto de caráter introdutório, ver por exemplo [4]. Uma discussão mais aprofundada pode ser encontrada em [6].

Este é o nosso objetivo: simplificar os cálculos. Queremos tomar um sistema e obter uma transformação canônica que simplifique os cálculos tanto quanto possível. E o que seria simplificar os cálculos tanto quanto possível? Ora, se pudermos encontrar coordenadas em que a dinâmica é completamente trivial, *i.e.*, em que as coordenadas e momentos são todos constantes, não poderíamos ser mais felizes.

Como podemos obter isso? Primeiramente, devemos ter à nossa disposição constantes suficientes. Uma forma seria utilizar as condições iniciais do problema. Como a evolução temporal  $q_0, p_0 \rightarrow q(t), p(t)$  é uma transformação canônica, sua inversa também o é (ver Exercício 81). Nestas novas coordenadas, a dinâmica é regida por uma Kamiltoniana  $K(Q, P, t)$  que há de satisfazer

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0, \quad (3.1)$$

e portanto  $K$  pode depender apenas do tempo. Como  $K$  e  $H$ , a Hamiltoniana original do sistema, se relacionam por

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (3.2)$$

onde  $S$  é uma função geratriz, a dependência de  $K$  em  $t$  pode ser eliminada adicionando à função geratriz um termo dependente apenas do tempo, que não altera as relações entre as variáveis canônicas. Deste modo,  $K$  pode ser tomada como tendo a forma  $K = 0$ , sem qualquer perda de generalidade.

Se tomarmos  $S$  como uma função geratriz do tipo 2, temos vemos da Eq. (3.2) que  $S$  precisa satisfazer à equação diferencial

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (3.3)$$

A Eq. (3.3) é conhecida como a equação de Hamilton-Jacobi. Se a resolvermos, podemos obter as soluções para  $q(t)$  e  $p(t)$  por meio da transformação canônica gerada por  $S$

$$p_i = \frac{S}{q_i}(q, P, t) = p_i(q, P, t), \quad Q_i = \frac{S}{P_i}(q, P, t) = Q_i(q, P, t), \quad (3.4)$$

onde  $Q_i$  e  $P_i$  são constantes. Isto, é claro, assumindo que as equações

$$Q_i = \frac{S}{P_i}(q, P, t) \quad (3.5)$$

podem ser resolvidas para os  $q_i$ . Para que isso seja possível, é preciso que valha o Teorema da Função Implícita[31, 44], o que significa que é preciso ter\*

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial P}\right) \neq 0. \quad (3.6)$$

---

\*Nem sempre esta condição é satisfeita. Veja [29] para uma discussão acerca disso, em particular no caso de uma partícula carregada se movendo na presença de um dipolo elétrico.

Perceba que para um sistema com  $n$  graus de liberdade, a equação de Hamilton-Jacobi é uma equação diferencial parcial em  $n + 1$  variáveis (as  $n$  coordenadas generalizadas e o tempo), e portanto devemos realizar  $n + 1$  integrais para resolvê-la. Isto implica que uma solução geral da equação deve depender de  $n + 1$  constantes de integração  $\alpha_i$ . Contudo, como  $S$  ocorre na equação de Hamilton-Jacobi apenas por meio de derivadas, é claro que se  $S$  é solução,  $S + \alpha_{n+1}$  também é. Como adicionar uma constante a uma função geratriz não altera a transformação canônica, podemos ignorar esta constante.

Deste modo, não nos importamos com soluções gerais da equação de Hamilton-Jacobi. Bastam soluções ditas completas, que são aquelas com a forma  $S = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$ , onde os  $\alpha_i$  são constantes, satisfazendo

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \alpha}\right) = 0. \quad (3.7)$$

Note que abandonamos a notação  $P_i$  em favor de  $\alpha_i$ , dados que os novos momentos são constantes. Também iremos preferir escrever  $\beta_i$  ao invés de  $Q_i$ .

### 3.2 Separação de Variáveis

Como esta abordagem é consideravelmente abstrata, tomemos alguns exemplos.

Começemos lidando com um problema tão simples quanto possível: uma partícula livre se movendo em uma dimensão. A Hamiltoniana é dada por

$$H(p, q, t) = \frac{p^2}{2m}. \quad (3.8)$$

A equação de Hamilton-Jacobi se escreve

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (3.9)$$

Como podemos sequer começar a resolver esta equação? O método mais tradicional é tentarmos o ansatz de separação de variáveis: note que, como  $\frac{\partial H}{\partial q} = 0$ , o momento  $p$  é conservado. Logo, é constante. Assim, a transformação canônica gerada por  $S$  pode muito bem manter  $p$  como está, sem precisar alterar sua estrutura. Basta fazer uma transformação identidade nas coordenadas  $q$  e  $p$ . Assim, buscamos uma solução com a forma

$$S(q, \alpha, t) = q\alpha + T(t), \quad (3.10)$$

onde o primeiro termo é justificado pelo Exercício 70. Note que esta solução possui o número correto de constantes de integração.

Utilizando este ansatz na Equação de Hamilton-Jacobi, temos

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{2m} + \frac{dT}{dt} &= 0, \\ \therefore T(t) &= -\frac{\alpha^2}{2m}t + c, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde  $c$  é uma constante de integração.

Logo,

$$S(q, \alpha, t) = q\alpha - \frac{\alpha^2}{2m}t, \quad (3.12)$$

onde desprezamos a constante de integração  $c$ , que não possui consequências físicas. Note que, para quaisquer valores de  $q$  e  $\alpha$ ,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \alpha} = 1, \quad (3.13)$$

e portanto vale a condição

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \alpha}\right) \neq 0. \quad (3.14)$$

$S$  é de fato uma integral completa da equação de Hamilton-Jacobi.

Podemos determinar o momento fazendo

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \alpha. \quad (3.15)$$

A coordenada  $q$  pode então ser obtida via

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\partial S}{\partial \alpha} = q - \frac{\alpha}{m}t, \\ q(t) &= \beta + \frac{\alpha}{m}t. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Podemos agora determinar as constantes  $\alpha$  e  $\beta$  ao impor condições iniciais. Concluímos que

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 + \frac{p_0}{m}t, \\ p(t) &= p_0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Tomemos a seguir o nosso exemplo favorito: o oscilador harmônico. Mais uma vez, a Hamiltoniana é

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}. \quad (3.18)$$

Logo, a equação de Hamilton-Jacobi é

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{m\omega^2 q^2}{2} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (3.19)$$

Desta vez a Hamiltoniana não possui coordenadas cíclicas, e não podemos simplificar a expressão para a função geratriz  $S$  usando uma transformação identidade. Contudo, a Hamiltoniana não possui dependência explícita no tempo, e portanto é conservada.

Denotemos seu valor por  $E$ , dado que neste caso a Hamiltoniana e a energia coincidem. Como

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (3.20)$$

vemos que

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E \quad (3.21)$$

é suficiente para obter  $K = 0$ . Isto nos conduz ao ansatz

$$S(q, E, t) = W(q) - Et, \quad (3.22)$$

onde utilizamos a constante  $E$  no lugar de  $\alpha$ .

Este ansatz, quando aplicado à equação de Hamilton-Jacobi, fornece

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dW}{dq} \right)^2 + \frac{m\omega^2 q^2}{2} - E = 0. \quad (3.23)$$

Uma das possíveis soluções é

$$W(q) = \int \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2} dq, \quad (3.24)$$

que conduz a

$$S(q, E, t) = \int \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2} dq - Et. \quad (3.25)$$

Note que a função geratriz  $S$  depende do número correto de constantes. Podemos obter a solução para  $q(t)$  utilizando a transformação canônica gerada por  $S$  ao fazer

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\partial S}{\partial E}, \\ &= \int \frac{m}{\sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}} dq - t, \\ &= \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\sqrt{\frac{m}{2E}} \omega q\right) - t. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Isolando  $q$  obtemos

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2E}{m}} \sin(\omega t + \omega\beta), \\ &= \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2E}{m}} \sin(\omega t) \cos(\omega\beta) + \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2E}{m}} \cos(\omega t) \sin(\omega\beta). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Para comparação com as soluções que obtivemos anteriormente, é interessante expressar  $E$  e  $\beta$  em termos das condições iniciais  $q_0$  e  $p_0$ . Como conhecemos a Hamiltoniana do oscilador harmônico, sabemos que

$$E = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q_0^2}{2}. \quad (3.28)$$

Também é simples mostrar que

$$p_0 = m\dot{q}(0). \quad (3.29)$$

Vemos pois que

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2E}{m}} \sin(\omega\beta), \\ p_0 &= \sqrt{2mE} \cos(\omega\beta). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Assim,

$$\beta = \frac{1}{\omega} \arctan\left(\frac{m\omega q_0}{p_0}\right). \quad (3.31)$$

Ao escrever  $E$  e  $\beta$  em termos de  $q_0$  e  $p_0$  na expressão que obtivemos para  $q(t)$ , segue que

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{\sqrt{p_0^2 + m^2\omega^2 q_0^2}}{m\omega} \left[ \sin(\omega t) \cos\left(\arctan\left(\frac{m\omega q_0}{p_0}\right)\right) + \cos(\omega t) \sin\left(\arctan\left(\frac{m\omega q_0}{p_0}\right)\right) \right], \\ &= q_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (3.32)$$

que é a mesma solução que conseguimos com os colchetes de Poisson (Eq. (2.201)) e com transformações canônicas (Eq. (2.201)). Perceba que por não termos normalizado as constantes fazendo  $m = \omega = 1$ , alguns dos passos ficaram com uma notação mais pesada.

Estes dois exemplos ilustram, de maneira simplificada, o método padrão que se utiliza para primeiro atacar um problema pela abordagem de Hamilton-Jacobi: separação de variáveis. Dado um sistema com  $n$  graus de liberdade independente do tempo, é prático tentar soluções com a forma

$$S(q, \alpha, t) = \sum_{i=1}^n S_i(q_i, \alpha) + S_0(t, \alpha). \quad (3.33)$$

Devido ao fato que não precisamos da solução geral da EDP, apenas de uma solução completa, frequentemente este método é suficiente.

No caso de  $q_n$  ser uma variável cíclica, note, pelos mesmos argumentos que usamos ao tratar da partícula livre, que é preciso ter

$$S(q, \alpha, t) = \alpha_n q_n + S_1(q_1, \dots, q_{n-1}, t). \quad (3.34)$$

O ponto que fizemos acerca da dependência temporal também é válido de modo mais geral. Todo problema com Hamiltoniana independente do tempo necessariamente terá

$$S(q, \alpha, t) = -Et + W(q). \quad (3.35)$$

A função  $W$  assim definida é conhecida como função característica de Hamilton. Perceba que, para Hamiltonianas independentes do tempo, a Equação de Hamilton-Jacobi se simplifica para

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E, \quad (3.36)$$

que é conhecida como equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo.

Note que Hamiltonianas dependentes do tempo não conduzem a soluções separáveis da equação de Hamilton-Jacobi. Podemos considerar, por exemplo, o caso simples de uma partícula se movendo sob a ação duma força dependente do tempo.

**Exercício 82:**

Considere uma partícula se movendo numa única dimensão sob a ação de uma força dependente do tempo,  $F(t)$ . A Hamiltoniana é dada por

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} - F(t)q. \quad (3.37)$$

Obtenha a solução para  $q$  através do formalismo de Hamilton-Jacobi. Perceba que um ansatz da forma

$$S(q, \alpha, t) = W(q) + S_0(t) \quad (3.38)$$

não será capaz de resolver o problema e proponha um outro ansatz. Recorde que não é preciso obter uma solução geral da equação de Hamilton-Jacobi: basta uma solução completa. 

Perceba que sempre que a Hamiltoniana possuir dependência explícita no tempo, ou isso ocorre por meio de um termo dinamicamente irrelevante que pode ser ignorado na Hamiltoniana por ser uma derivada total temporal, ou a dependência ocorre num termo que possui produtos com momentos ou coordenadas, e isso impede que a equação de Hamilton-Jacobi seja solucionada via separação de variáveis.

É possível que o método de Hamilton-Jacobi lhe pareça excessivamente complicado, mas perceba qual seu poder: ele reduz de maneira incrivelmente simples o problema mecânico a meras quadraturas.

Dizemos que um problema foi reduzido a quadraturas quando para solucioná-lo resta apenas o cálculo de integrais e operações algébricas, possivelmente envolvendo a inversão de funções. Todas as equações diferenciais foram devidamente resolvidas, porém as soluções podem estar em uma forma implícita.

Consideremos um último exemplo de aplicação do método, desta vez envolvendo mais variáveis. Consideremos um potencial dado em coordenadas esféricas por

$$V(r, \theta, \phi) = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\phi)}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (3.39)$$

Potenciais desta forma levam a soluções separáveis da equação de Hamilton-Jacobi[27]. Como o último termo raramente seria de interesse físico, tomamos  $c(\phi) = 0$  por simplicidade. Existem exemplos de potenciais fisicamente interessantes com  $b(\theta) \neq 0$ . Ver, por exemplo, o elétron num campo de dipolo em [29].

A Hamiltoniana associada ao potencial da Eq. (3.39) é

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta, p_\phi) = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2}. \quad (3.40)$$

A equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo é

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} = E. \quad (3.41)$$

Naturalmente, tentaremos uma solução por separação de variáveis. Como  $\phi$  é coordenada cíclica, usamos

$$W(r, \theta, \phi) = R(r) + \Theta(\theta) + \alpha_\phi \phi. \quad (3.42)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left( \frac{dR}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left( \frac{d\Theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} &= E, \\ r^2 \left( \frac{dR}{dr} \right)^2 + \left( \frac{d\Theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2 \theta} + 2mr^2 a(r) + 2mb(\theta) &= 2mEr^2, \\ r^2 \left( \frac{dR}{dr} \right)^2 + 2mr^2(a(r) - E) &= - \left( \frac{d\Theta}{d\theta} \right)^2 - \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2 \theta} - 2mb(\theta). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Perceba que o lado esquerdo da equação é independente de  $\theta$ , enquanto o lado direito é independente de  $r$ . Portanto, é preciso que os dois lados sejam, na verdade, constantes. Assim, temos o par de equações

$$\begin{cases} r^2 \left( \frac{dR}{dr} \right)^2 + 2mr^2(a(r) - E) = -\alpha_\theta^2, \\ \left( \frac{d\Theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2 \theta} + 2mb(\theta) = \alpha_\theta^2. \end{cases} \quad (3.44)$$

A primeira equação fornece

$$R(r) = \int \sqrt{2m(E - a(r)) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} dr. \quad (3.45)$$

A segunda fornece

$$\Theta(\theta) = \int \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2 \theta} - 2mb(\theta)} d\theta. \quad (3.46)$$

Assim, uma solução completa para a equação de Hamilton-Jacobi é

$$S(r, \theta, \phi, E, \alpha_\theta, \alpha_\phi, t) = -Et + \alpha_\phi \phi + \int \sqrt{2m(E - a(r)) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} dr + \int \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2 \theta} - 2mb(\theta)} d\theta. \quad (3.47)$$

A solução para a evolução temporal das coordenadas  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$  é então dada em termos de quadraturas por meio das equações

$$\begin{aligned} \beta_E &= \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \int \frac{m}{\sqrt{2m(E - a(r)) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}} dr, \\ \beta_\theta &= \frac{\partial S}{\partial \theta} = - \int \frac{\alpha_\theta}{r^2 \sqrt{2m(E - a(r)) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}} dr + \int \frac{\alpha_\theta}{\sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2 \theta} - 2mb(\theta)}} d\theta, \\ \beta_\phi &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_\phi} = \phi - \int \frac{\alpha_\phi}{\sin^2 \theta \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2 \theta} - 2mb(\theta)}} d\theta. \end{aligned} \quad (3.48)$$

### Exercício 83 [Efeito Stark]:

Chamamos de efeito Stark a alteração nos níveis discretos de energia num átomo de hidrogênio devido à presença de campo elétrico uniforme externo. Enquanto o efeito é inerentemente quântico, visto que em Mecânica Clássica não há níveis de energia discretos, podemos nos interessar na dinâmica clássica.

Assumiremos que o próton no núcleo do átomo de hidrogênio é muito mais massivo que o elétron, de modo que podemos aproximá-lo como estando em repouso na origem. A força de atração entre o próton e o elétron é Coulombiana, e portanto proporcional a  $\frac{1}{r}$ , enquanto o efeito do campo elétrico sobre o elétron é uma força constante. O potencial é dado (em unidades Gaussianas) por

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{r} - eEz, \quad (3.49)$$

onde  $e > 0$  é a carga do elétron e  $E$  é a intensidade do campo elétrico externo.

Note que o termo  $-eEz$  assume que o campo elétrico está na direção  $\hat{z}$ . Justifique que esta hipótese pode ser feita sem perda de generalidade.

A equação de Hamilton-Jacobi pode ser separável em alguns sistemas de coordenadas, mas não em outros. No caso do efeito Stark, é particularmente conveniente trabalhar em coordenadas parabólicas  $\xi, \eta, \phi$ , definidas em termos de coordenadas cilíndricas  $s, \phi, z$  por

$$s = \sqrt{\xi\eta}, \quad z = \frac{\xi - \eta}{2}, \quad \phi = \phi. \quad (3.50)$$

Em coordenadas cilíndricas, a Lagrangeana é dada por

$$L = \frac{m}{2} (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - V. \quad (3.51)$$

Mostre que a Hamiltoniana para o efeito Stark pode ser escrita, em coordenadas parabólicas, na forma

$$H(\xi, \eta, p_\xi, p_\eta, p_\phi) = \frac{2}{m} \frac{\xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2}{\xi + \eta} + \frac{p_\phi^2}{2m\xi\eta} + \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta}, \quad (3.52)$$

para funções  $a(\xi)$  e  $b(\eta)$  apropriadas. Escreva a equação de Hamilton-Jacobi, aplique separação de variáveis e reduza a solução do problema a quadraturas. ✚

Por fim, devemos mencionar que assim como  $W$  na equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo é conhecida como função característica de Hamilton, a função  $S$  na equação de Hamilton-Jacobi é conhecida como função principal de Hamilton. A notação sugere uma segunda interpretação para  $S$ : a ação.

Consideremos a derivada total no tempo da função principal de Hamilton  $S$ , que definimos como sendo a solução da equação de Hamilton-Jacobi. Temos

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt}(q(t), \alpha, t) &= \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}, \\ &= \sum_i p_i \dot{q}_i - H, \\ &= L. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Integrando a equação, temos

$$S(q_1, t_1, q_2, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, t_1, q_2, t_2, t) dt, \quad (3.54)$$

onde desta vez não estamos considerando coordenadas quaisquer: estamos considerando apenas a trajetória real  $q(t)$ , que pode ser escrita em termos das condições de contorno  $q(t_1)$  e  $q(t_2)$ , *i.e.*, podemos escrever  $q = q(q_1, t_1, q_2, t_2, t)$ . Substituição desta expressão na Lagrangeana nos permite obter a Eq. (3.54).

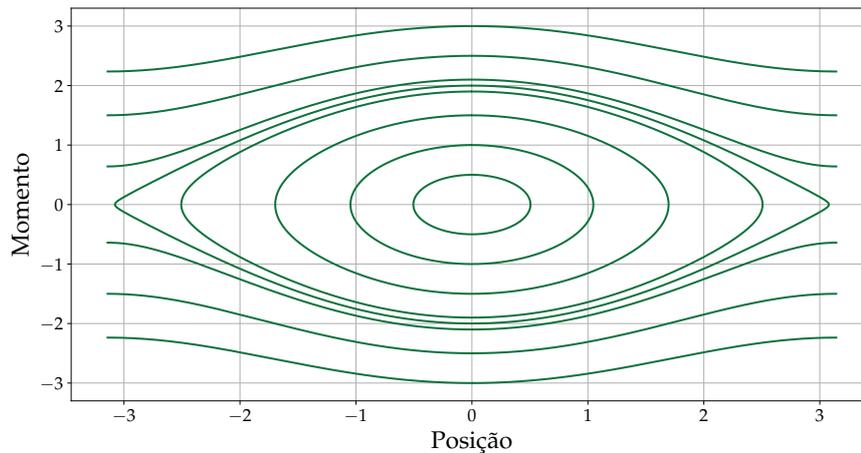
### 3.3 Variáveis de Ação-Ângulo

Embora o método da equação de Hamilton-Jacobi permita obter a solução do sistema mecânico em termos de quadraturas, por vezes isso nem sempre é o que desejamos. As variáveis de ação-ângulo fornecem método semelhante à equação de Hamilton-Jacobi que nos permitirá obter as frequências de vibração de certos sistemas, chamados multiplamente periódicos, de maneira extremamente simples.

Começamos com um exemplo simplificado. Tome um sistema com um grau de liberdade descrito por uma Hamiltoniana independente do tempo  $H(q, p)$ . Sabemos que a equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo é

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E. \quad (3.55)$$

Consideremos a princípio o caso em que as trajetórias são curvas fechadas, como as elipses que ocorrem na solução do oscilador harmônico simples, ou próximo à origem do



**Figura 16.** Retrato de fase para o movimento do pêndulo simples em unidades com  $m = g = l = 1$  e passo  $\Delta t = 0.0001$  calculado com o método de Euler-Cromer. O código em Python utilizado para gerar o gráfico pode ser obtido ao solucionar o Exercício 84.

pêndulo simples, cujo retrato de fase é dado na Figura 7. Como já sabemos que o método de Euler-Cromer é mais adequado para problemas Hamiltonianos do que o método de Euler, podemos calcular uma nova figura, mais precisa, com poucas alterações no código. O resultado está exibido na Figura 16.

**Exercício 84:**

Modifique o código do Subapêndice B.2 para calcular o retrato de fase do pêndulo simples utilizando o método de Euler-Cromer ao invés do método de Euler. Basta alterar uma linha de código (ou alterar uma e adicionar uma nova, caso você prefira uma solução um pouco mais eficiente). ✖

De todo modo, tomemos uma destas trajetórias fechadas, assumindo-a livre de pontos fixos. Digamos a que possui energia  $E$ . Consideremos então a quantidade

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \oint p \, dq. \tag{3.56}$$

Não se assuste com a integral: nesta situação ela significa apenas que devemos calcular a integral de  $p(q)$  da esquerda para a direita considerando a parte positiva da curva e depois integrar da direita para a esquerda considerando a parte negativa. Ou seja, a integral representa apenas a área envolta pela trajetória no espaço de fases, e  $J$  é esta área dividida por  $2\pi$ . Pelo Teorema de Liouville (Exercício 78), sabemos que  $J$  é constante do movimento. Consideremos então a transformação canônica que leva  $p$  a  $J(E)$ , ao invés de  $E$ . A nova função geratriz é

$$W(q, J) \equiv W(q, E(J)) \tag{3.57}$$

e vemos pela equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo que a Hamiltoniana se tornou\*

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E(J), \quad (3.58)$$

ou seja, uma função apenas do novo momento  $J$ , tendo uma coordenada cíclica.

A coordenada generalizada canonicamente conjugada a  $J$ , que denotaremos por  $\psi$ , é dada por

$$\psi = \frac{\partial W}{\partial J}. \quad (3.59)$$

O novo momento  $J$  é frequentemente chamado de variável de ação, enquanto sua coordenada canonicamente conjugada  $\psi$  é chamada de coordenada de ângulo.

O Teorema de Liouville garante que  $J$  é constante do movimento, mas também podemos ver isso por meio das equações canônicas. Temos

$$\dot{J} = \frac{\partial E}{\partial \psi} = 0, \quad (3.60)$$

e portanto  $J$  é conservado.

$E(J)$  é também uma quantidade conservada, o que pode ser concluído a partir do fato que a Hamiltoniana não possui dependência explícita no tempo ou do fato de que  $E(J)$  depende apenas de  $J$ , que é conservado. De todo modo, isto implica por meio das equações canônicas que

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{\partial E}{\partial J}, \\ \psi(t) &= \frac{\partial E}{\partial J}t + \psi_0. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Gostaríamos de calcular  $\frac{\partial E}{\partial J}$ . Para isso, tomemos uma derivada em relação a  $J$  da única equação que dispomos que diz algo sobre  $J$ : a Eq. (3.56). Denotando os pontos extremos

---

\*Estamos aqui interpretando a função característica de Hamilton como sendo a geratriz da transformação canônica no lugar da função principal de Hamilton. Note que, como a Hamiltoniana é independente do tempo, o único efeito qualitativo que isto tem sobre a teoria é que a Hamiltoniana se torna  $E$  ao invés de 0. Como isto é apenas uma questão de interpretação, os resultados quantitativos seguem sendo os mesmos.

da trajetória por  $q_1(J)$  e  $q_2(J)$  temos

$$\begin{aligned}
\frac{dJ}{dJ} &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dJ} \oint p \, dq, \\
1 &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dJ} \oint \frac{\partial W}{\partial q} \, dq, \\
&= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial^2 W}{\partial J \partial q} \, dq, \\
&= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial \psi}{\partial q} \, dq, \\
&= \frac{\Delta \psi}{2\pi}, \\
\Delta \psi &= 2\pi.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Assim, ao longo de um período  $\psi$  varia em  $2\pi$ . Se denotarmos

$$\omega \equiv \frac{\partial E}{\partial J}, \tag{3.63}$$

temos então que

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{3.64}$$

e obtivemos um método para calcular a frequência de oscilação do sistema sem precisar nos preocupar com as dificuldades de resolver equações diferenciais ou calcular quadraturas.

Podemos agora generalizar este formalismo para sistemas multiplamente periódicos.

A primeira pergunta que surge é o que é um sistema multiplamente periódico. Consideremos um sistema físico descrito por uma Hamiltoniana independente do tempo que, em algum sistema de coordenadas, admite como solução completa para a equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo uma função da forma

$$W(q, \alpha) = \sum_i W_i(q_i, \alpha). \tag{3.65}$$

Tais sistemas são ditos separáveis. Um sistema separável é dito multiplamente periódico se em cada plano de fase bidimensional  $(q_i, p_i)$ , toda trajetória satisfizer uma das duas condições:

- i. a trajetória no espaço de fases reduzido  $(q_i, p_i)$  é uma curva fechada;
- ii. a trajetória no espaço de fases reduzido  $(q_i, p_i)$  é uma função  $p_i = p_i(q_i, \alpha)$  periódica em  $q_i$ .

O primeiro caso é conhecido como libração, e o segundo como rotação.

Estas definições podem soar um pouco abstratas, mas se tornam mais simples ao ver exemplos. Para baixas energias, o pêndulo simples exhibe libração. Note que nas proximidades da origem da Figura 16 as trajetórias são elipses, *i.e.*, curvas fechadas.

Fisicamente, o pêndulo oscila entre dois pontos extremos. Já para altas energias, o pêndulo entra em rotação. Em regiões distantes da origem da Figura 16 as trajetórias escapam da região graficada. Fisicamente, o pêndulo chega ao ponto mais alto da trajetória com momento não nulo, e portanto seu movimento nunca se inverte. Há ainda uma curva que divide a região de libração da região de rotação, chamada de separatriz. Os experimentos numéricos não são capazes de obtê-la exatamente (não é possível tomar as condições iniciais exatas sobre a curva e o erro numérico nos removeria dela), mas veja que a Figura 16 a aproxima como um regime de libração extremamente distorcido e prestes a se tornar uma rotação.

De modo inteiramente análogo ao feito no nosso modelo simplificado, definimos

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i, \quad (3.66)$$

onde a integral deve ser entendida como sobre um período completo, no caso de rotações.

Podemos expressar as constantes  $\alpha$  em termos das variáveis de ação e obter uma nova função geratriz

$$W(q, J) = \sum_i W_i(q_i, J) = \sum_i W_i(q_i, \alpha(J)) \quad (3.67)$$

com Kamiltoniana dada por\*

$$K(\psi, J) = H\left(q(\psi, J), \frac{\partial W}{\partial q}(\psi, J)\right) = E(J), \quad (3.68)$$

mantendo todas as coordenadas  $\psi$  cíclicas, de modo que a dinâmica regida pelas equações canônicas é

$$\dot{J}_i = \frac{\partial E}{\partial J_i} = 0, \quad \dot{\psi}_i = \frac{\partial E}{\partial \psi_i} \equiv \omega_i, \quad (3.69)$$

onde as frequências  $\omega_i$  são constantes. Assim,

$$\psi_i(t) = \omega_i t + \psi_{i0}. \quad (3.70)$$

Suponha que o movimento como um todo é periódico de período  $T$ . Naturalmente, isto requer que o movimento seja periódico em todas as projeções nos espaços de fase reduzidos  $(q_i, p_i)$ . Para todo  $i$ , existe  $n_i$  natural tal que  $T = n_i T_i$ , onde  $T_i$  é o período fundamental† da trajetória projetada no espaço de fase reduzido  $(q_i, p_i)$ .

### Exercício 85:

Suponha um sistema periódico de período  $T$  com dois graus de liberdade. Sejam  $T_1$  e

---

\*Preservamos a notação  $E$  para a energia, mas note que  $E$  é na verdade uma das constantes  $\alpha_i$ . Tal qual anteriormente, a igualdade segue da equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo e do fato de que  $E$  pode ser expressa como função das variáveis de ação apenas.

†Se uma função  $f$  é periódica de período  $T$ , então  $f(t+T) = f(t)$  para todo  $t$ . Em particular, isto implica que  $f(t+2T) = f(t+T) = f(t)$  para todo  $t$ , e portanto  $f$  é periódica de período  $2T$ . Por período fundamental nos referimos ao menor número real não-nulo  $T$  tal que  $f(t+T) = f(t)$  para todo  $t$ .

$T_2$  os períodos fundamentais nos espaços de fase reduzidos  $(q_1, p_1)$  e  $(q_2, p_2)$ . Denotemos  $\alpha_i = \frac{T}{T_i}$ . Mostre que  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$  precisa ser racional.

Generalize o argumento para um número arbitrário de graus de liberdade. ✖

A variação numa variável de ângulo ao longo de um período é dada por

$$\begin{aligned}
 \Delta\psi_i &= \sum_k \oint \frac{\partial\psi_i}{\partial q_k} dq_k, \\
 &= \sum_k \oint \frac{\partial^2 W}{\partial J_i \partial q_k} dq_k, \\
 &= \sum_k \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \frac{\partial W}{\partial q_k} dq_k, \\
 &= \frac{\partial}{\partial J_i} \sum_k \oint p_k dq_k, \\
 &= \frac{\partial}{\partial J_i} \sum_k 2\pi n_k J_k, \\
 &= 2\pi n_i,
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

onde usamos o fato que o movimento completa  $n_k$  ciclos no espaço de fase reduzido  $(q_k, p_k)$ , visto que  $T = n_k T_k$ .

Como primeiro exemplo, tomemos (como sempre) o oscilador harmônico simples, com Hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}. \tag{3.72}$$

A variável de ação é dada por

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{2\pi} \oint p dq, \\
 &= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq,
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

e portanto devemos “resolver” a equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo. Temos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2m} \left( \frac{dW}{dq} \right)^2 + \frac{m\omega^2 q^2}{2} &= E, \\
 \frac{dW}{dq} &= \pm \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}.
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

Assim, por simetria,

$$J = \frac{2}{\pi} \int_0^A \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2} dq, \tag{3.75}$$

onde  $A$  é a amplitude de oscilação: o valor máximo que a coordenada  $q$  pode assumir. Como o valor máximo da coordenada é obtido com  $p = 0$ , vemos que

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2},$$

$$A = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}. \quad (3.76)$$

Portanto,

$$J = \frac{2m\omega}{\pi} \int_0^A \sqrt{A^2 - q^2} dq, \quad (3.77)$$

com  $A$  dado pela Eq. (3.76). Segue que

$$J = \frac{E}{\omega} \quad (3.78)$$

e vemos imediatamente que

$$E(J) = \omega J. \quad (3.79)$$

A frequência do sistema é então

$$\frac{\partial E}{\partial J} = \omega, \quad (3.80)$$

como esperado.

Pode-se tentar estender a ideia de obter uma Kamiltoniana dependente apenas dos novos momentos, mas mantendo todas as coordenadas cíclicas, a outros sistemas, e estudar em quais condições isto é possível. Este estudo é uma porta de entrada para a integrabilidade de sistemas Hamiltonianos e diversos tópicos interessantíssimos, como a teoria de perturbações em Mecânica Clássica e o caos determinístico. Como mencionamos anteriormente, ao leitor interessado de maneira profunda nestes temas, recomenda-se a leitura de, por exemplo, [5, 41, 50]. Um texto a nível mais introdutório é [29]. Para um breve exemplo historicamente relevante, recomenda-se [21].

## Introdução

Me nego a escrever uma seção de “Conclusões”, ou de encerramento. Por mais que eu tenha me esforçado para fazer um curso tão completo quanto possível, mal arranhamos a superfície da Mecânica Clássica, e diversos caminhos podem ser seguidos a partir daqui.

Uma opção é a que acabamos de mencionar: o estudo de integrabilidade e caos. Como já mencionei algumas vezes, algumas referências que podem ser interessantes para este caminho são [2, 5, 21, 29, 41, 50].

Outra possibilidade é estudar os mesmos assuntos que acabamos de estudar, mas pelo ponto de vista da Geometria Diferencial, que fornece uma descrição incrivelmente natural e ainda mais profunda da Mecânica Clássica. Pode-se ver, por exemplo, [5, 23, 26].

Outra possibilidade ainda é passar ao estudo de sistemas contínuos e à chamada Teoria Clássica de Campos, que é o caminho natural para progredir em direção à compreensão de Física de Partículas, Relatividade Geral, e assim por diante. Algumas referências que podem ser úteis nesta jornada são [2, 3, 28, 29].

## Bibliografia

Esta bibliografia inclui todas as obras consultadas durante a confecção deste texto, além de algumas sugestões de leitura para curiosos.

Alguns textos claramente exigem alguns requisitos a mais (é de se esperar que um livro chamado *Quantum Field Theory in a Nutshell* assumira alguma familiaridade com temas de Mecânica Quântica). Os listo aqui de toda forma, pois acredito que é uma forma de incentivar que os leitores explorem um pouco sobre temas mais avançados e diferentes. Frequentemente há um certo susto com o conteúdo, mas às vezes percebe-se que não era tão complexo quanto se imaginava. Ademais, depois de um anos revisita-se um texto que costumava ser visto como impossível e a sensação de lê-lo mais uma vez e entender o que está acontecendo é quase indescritível.

As principais referências para estas notas foram [26, 27, 29, 47, 50]. Aos interessados em textos mais acessíveis e próximos deste curso, recomendo [16, 17, 20, 26, 27, 29, 39, 47]. [5, 23, 41, 50] são textos mais maduros.

Dentre as demais obras, encontram-se livros acerca de assuntos mencionados ao longo do texto, mas que fogem ao nosso enfoque – como Mecânica Estatística, Teorias de Campos, ou Matemática –, outros textos complementares e, com destaque particular, artigos envolvendo os assuntos abordados. Recomendo fortemente a leitura dos artigos mencionados como forma de aprofundamento.

Todos os textos referenciados foram consultados na escrita destas notas ou citados explicitamente ao longo do texto como leituras complementares. [37] pode não parecer uma referência acerca de Mecânica Clássica a primeira vista, mas acredito que uma rápida leitura de seu Capítulo 2 desmente esta impressão. O mesmo vale para outros dos textos referenciados.

1. Abrams, D. & Strogatz, S. Modelling the Dynamics of Language Death. *Nature* **424**, 900 (2003).
2. Aguiar, M. A. M. *Tópicos de Mecânica Clássica* (notas de aula). Jun. de 2019. <https://sites.ifi.unicamp.br/aguiar/files/2014/10/top-mec-clas.pdf>.
3. Alves, N. *A Brief Introduction to Classical Field Theory* (notas de seminário). 2019. [http://fma.if.usp.br/~nickolas/pdf/A\\_Brief\\_Introduction\\_to\\_Classical\\_Field\\_Theory.pdf](http://fma.if.usp.br/~nickolas/pdf/A_Brief_Introduction_to_Classical_Field_Theory.pdf).
4. Alves, N. *O Grupo de Lorentz: Relatividade Restrita aos olhos de um matemático* [http://fma.if.usp.br/~nickolas/pdf/O\\_Grupo\\_de\\_Lorentz.pdf](http://fma.if.usp.br/~nickolas/pdf/O_Grupo_de_Lorentz.pdf).
5. Arnold, V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer New York, New York, 1989).
6. Barata, J. C. A. *Notas de Física-Matemática* [http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas\\_de\\_aula/notas\\_de\\_aula.html](http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/notas_de_aula.html).
7. Burden, R. L. & Faires, J. D. *Numerical Analysis* (Brooks/Cole, Boston, 2011).
8. Churchill, R. V., Brown, J. W. & Verhey, R. F. *Complex Variables and Applications* (McGraw-Hill, New York, 1974).

9. Coelho, F. U. & Lourenço, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear* (Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013).
10. Cromer, A. Stable solutions using the Euler approximation. *American Journal of Physics* **49**, 455 (1981).
11. Dirac, P. A. M. *Lectures on Quantum Mechanics* (Dover Publications, Mineola, 2001).
12. Dirac, P. A. M. *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford University Press, London, 1967).
13. Farina de Souza, C. & Gandelman, M. M. An Algebraic Approach for Solving Mechanical Problems. *American Journal of Physics* **58**, 491 (1990).
14. Feynman, R., Leighton, R. & Sands, M. *Lições de Física de Feynman: Edição Definitiva* (Bookman, Porto Alegre, 2008).
15. Fleming, H. *Simetrias Fundamentais* <http://www.hfleming.com/galileu.pdf>.
16. Goldstein, H., Poole, C. & Safko, J. *Classical Mechanics* (Addison Wesley, San Francisco, 2002).
17. Greiner, W. *Classical Mechanics: Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics* (Springer, Heidelberg, 2010).
18. Griffiths, D. J. *Introduction to Electrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2017).
19. Guidorizzi, H. *Um Curso de Cálculo, Volume 2* (LTC, Rio de Janeiro, 2014).
20. Hand, L. N. & Finch, J. D. *Analytical Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
21. Henon, M. & Heiles, C. The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments. *Astronomical Journal* **69**, 73–79 (1964).
22. Johnson, B. D. The Nonholonomy of the Rolling Sphere. *The American Mathematical Monthly* **114**, 500–508. ISSN: 0002-9890. <http://www.jstor.org/stable/27642248> (2007).
23. José, J. V. & Saletan, E. J. *Classical Dynamics: A Contemporary Approach* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
24. Kardar, M. *Statistical Physics of Particles* (Cambridge University Press, New York, 2007).
25. Krein, G. *Effective Quantum Field Theory* (notas de aula para o curso apresentado na edição de 2018 do IFT-Perimeter-SAI FR Journeys into Theoretical Physics). <http://journeys.ictp-saifr.org/journeys-2018/journeys-2018-videos/>.
26. Kubizňák, D. *Theoretical Mechanics* (notas de aula para o curso de Mecânica Teórica do Perimeter Scholars International).
27. Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. *Mechanics* (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1976).
28. Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. *The Classical Theory of Fields* (Pergamon Press, Oxford, 1987).

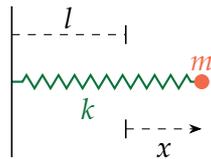
29. Lemos, N. *Analytical Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2018).
30. Lévy-Leblond, J.-M. em *Group Theory and its Applications Vol. II* (ed. Loeb, E.) 221–299 (Academic Press, New York, 1971).
31. Lima, E. L. *Curso de Análise Vol. 2* (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2018).
32. Ludford, G. S. S. & Yannitell, D. W. Canonical Transformations without Hamilton's Principle. *American Journal of Physics* **36**, 231 (1968).
33. Martínez-García, R. *Nonlinear Phenomena in Biology* (gravações do curso apresentado na edição de 2019 do IFT-Perimeter-SAIFR Journeys Into Theoretical Physics). <http://journeys.ictp-saifr.org/journeys-2019/videos/>.
34. Norton, J. D. Causation as Folk Science. *Philosopher's Imprint* **3**, 1–22. ISSN: 1533-628X. <http://hdl.handle.net/2027/spo.3521354.0003.004> (2003).
35. Nussenzveig, H. M. *Curso de Física Básica, 1: Mecânica* (Blucher, São Paulo, 2013).
36. Nussenzveig, H. M. *Curso de Física Básica, 2: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor* (Blucher, São Paulo, 2014).
37. Padmanabhan, T. *Theoretical Astrophysics Vol. 1: Astrophysical Processes* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
38. Padmanabhan, T. *Cosmology and Astrophysics Through Problems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
39. Pars, L. A. *A Treatise on Analytical Dynamics* (Heinemann, London, 1965).
40. Poisson, E. *An Advanced Course in General Relativity* 2002.
41. Reichl, L. E. *The Transition to Chaos: Conservative Classical Systems and Quantum Manifestations* (Springer, New York, 2004).
42. Salinas, S. *Introdução à Física Estatística* (Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018).
43. Schuller, F. P. *The Mathematics and Physics of Gravity and Light* [https://www.youtube.com/playlist?list=PLFeEvEPtX\\_0S6vxxiiNPrJbLu9aK1UVC\\_](https://www.youtube.com/playlist?list=PLFeEvEPtX_0S6vxxiiNPrJbLu9aK1UVC_).
44. Spivak, M. *O Cálculo em Variedades* (Editora Ciência Moderna Ltda., Rio de Janeiro, 2003).
45. Strogatz, S. *Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* (Westview Press, Boulder, 2015).
46. Sundermeyer, K. *Symmetries in Fundamental Physics* (Springer, Cham, 2014).
47. Tong, D. *Classical Dynamics* (notas de aula). 2015. <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/dynamics/clas.pdf>.
48. Trancanelli, D. Grandezas Físicas e Análise Dimensional: da Mecânica à Gravidade Quântica. *Revista Brasileira do Ensino de Física* **38**. ISSN: 1806-1117 (2016).
49. Vesely, F. *Computational Physics: An Introduction* (Springer, Boston, 2001).

50. Wrezinski, W. F. *Mecânica Clássica Moderna* (Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015).
51. Yoshida, H. Recent progress in the theory and application of symplectic integrators. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **56**, 27–43 (1993).
52. Zangwill, A. *Modern Electrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2013).
53. Zee, A. *Quantum Field Theory in a Nutshell* (Princeton University Press, Princeton, 2010).
54. Zia, R. K. P., Redish, E. F. & McKay, S. R. Making sense of the Legendre transform. *American Journal of Physics* **77**, 614 (2009).

## A O Oscilador Harmônico Simples

### A.1 A Equação do Oscilador Harmônico Simples

Consideremos o problema de determinar o movimento de uma massa  $m$  acoplada a uma mola com constante elástica  $k$  e comprimento relaxado  $l$ , como ilustrado na Figura 17. Denotamos por  $x$  a diferença entre a posição da massa e o comprimento relaxado da mola,  $l$ .



**Figura 17.** Um corpo com massa  $m$  acoplado a uma mola de constante elástica  $k$  com comprimento relaxado  $l$ .

Pela Lei de Hooke, a força elástica que age sobre a mola é  $F = -kx$ . Pela Segunda Lei de Newton, temos então a equação diferencial de segunda ordem

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (\text{A.1})$$

Rearranjando termos, podemos escrever

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (\text{A.2})$$

onde definimos  $\omega^2 \equiv \frac{k}{m}$  como forma de nos lembrar que a razão  $\frac{k}{m}$  é sempre positiva: não existem corpos com massa negativa nem molas com constante elástica negativa\*.

Este pode parecer um problema simples, mas ele nos permite obter resultados poderosíssimos em diversas áreas da Física. Entender a fundo o problema do oscilador harmônico simples (que é o nome dado a sistemas que respeitam a Eq. (A.2)) permite que alguém estude o período de um pêndulo simples, a corrente e tensão em circuitos elétricos, e mesmo a criação e aniquilação de partículas em Teoria Quântica de Campos.

---

\*Se existirem, não são estas que nos interessam no momento.

A Eq. (A.2) é uma equação diferencial ordinária homogênea de segunda ordem a coeficientes constantes. Ou seja, possui a forma

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0, \quad (\text{A.3})$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes reais. O capítulo 5 de [19], por exemplo, discute em detalhe como resolver equações desta forma e mesmo mais gerais, mas neste texto utilizaremos um método particularmente querido pelos físicos: chutar a solução. Isso pode parecer estranho e mesmo tolo, então ao invés de chamar de chute, chamaremos de *ansatz*, pois palavras em alemão soam mais cultas.

Notemos, antes de mais nada, que a solução geral da Eq. (A.3) deve envolver duas constantes arbitrárias, visto que estamos lidando com uma equação diferencial de segunda ordem, e portanto o processo de solução envolve integrar a equação duas vezes. Além disso, a Eq. (A.3) é linear: se  $x(t)$  e  $y(t)$  a resolvem, então  $z(t) = x(t) + \lambda y(t)$  também a resolve, para qualquer constante  $\lambda$ .

**Exercício 86:**

Mostre que a função constante igual a 0 é solução da Eq. (A.3). ✠

**Exercício 87:**

Sejam  $x(t)$  e  $y(t)$  tais que

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0, \quad a\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + cy(t) = 0. \quad (\text{A.4})$$

Mostre que, para qualquer constante  $\lambda$ ,  $z(t) = x(t) + \lambda y(t)$  também satisfaz

$$a\ddot{z}(t) + b\dot{z}(t) + cz(t) = 0. \quad (\text{A.5})$$



**Exercício 88:**

Utilize os resultados dos exercícios anteriores para mostrar que se  $x(t)$  e  $y(t)$  são tais que

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0, \quad a\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + cy(t) = 0, \quad (\text{A.6})$$

então, para quaisquer constantes  $\lambda$  e  $\mu$ ,  $z(t) = \mu x(t) + \lambda y(t)$  também satisfaz

$$a\ddot{z}(t) + b\dot{z}(t) + cz(t) = 0. \quad (\text{A.7})$$

Não calcule as derivadas explicitamente. É possível realizar a demonstração utilizando apenas os resultados finais dos exercícios anteriores. ✠

Para obter um *ansatz* para a solução da Eq. (A.2), começaremos buscando uma solução numérica da equação. Newton teria um certo nível de dificuldade para fazer isso, mas hoje em dia dispomos de computadores e podemos usar estas ferramentas para obter soluções numéricas para os problemas que não conseguimos resolver analiticamente.

Para resolver a equação numericamente, começaremos separando-a em duas equações de primeira ordem. Para tal, basta definirmos  $v(t) = \dot{x}(t)$ , a velocidade da massa. Isto nos permite escrever a Eq. (A.2) na forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = -\omega^2 x(t), \\ \dot{x}(t) = v(t). \end{cases}$$

Para resolver o sistema numericamente, utilizaremos uma aproximação linear. Sabemos que uma função  $f(t)$  pode ser aproximada por uma reta como

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \mathcal{O}((t - t_0)^2), \quad (\text{A.8})$$

onde  $\mathcal{O}((t - t_0)^2)$  indica termos que são proporcionais a  $(t - t_0)^n$  para  $n \geq 2$ . Assim, a Eq. (A.8) nos diz que

$$\begin{cases} v(t) = v(t_0) - \omega^2(t - t_0)x(t_0) + \mathcal{O}((t - t_0)^2), \\ x(t) = x(t_0) + (t - t_0)v(t_0) + \mathcal{O}((t - t_0)^2). \end{cases}$$

Logo, se conhecermos a velocidade  $v$  e a posição  $x$  da massa no instante  $t_0$ , podemos obter seus valores numéricos no instante  $t$  com precisão da ordem de  $(t - t_0)^2$ . Para que a precisão seja melhorada, devemos utilizar um passo  $\Delta t = t - t_0$  pequeno. Quanto menor o passo, melhor a precisão.

Assim, se possuímos as condições iniciais do sistema para  $t_0 = 0$ , podemos obter sua posição e velocidade para  $t_1 = \Delta t$ . Utilizando estes novos dados, podemos repetir o processo para obter a posição e velocidade para  $t_2 = 2\Delta t$ , e assim sucessivamente. Temos então

$$\begin{cases} v(t_{n+1}) = v(t_n) - \omega^2 x(t_n)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2), \\ x(t_{n+1}) = x(t_n) + v(t_n)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2). \end{cases}$$

Este procedimento é conhecido como Método de Euler, e é a forma mais simples de se resolver equações diferenciais ordinárias numericamente. Perceba que, conforme se itera as etapas, os erros da ordem de  $\Delta t^2$  se acumulam e o cálculo se torna progressivamente menos confiável.

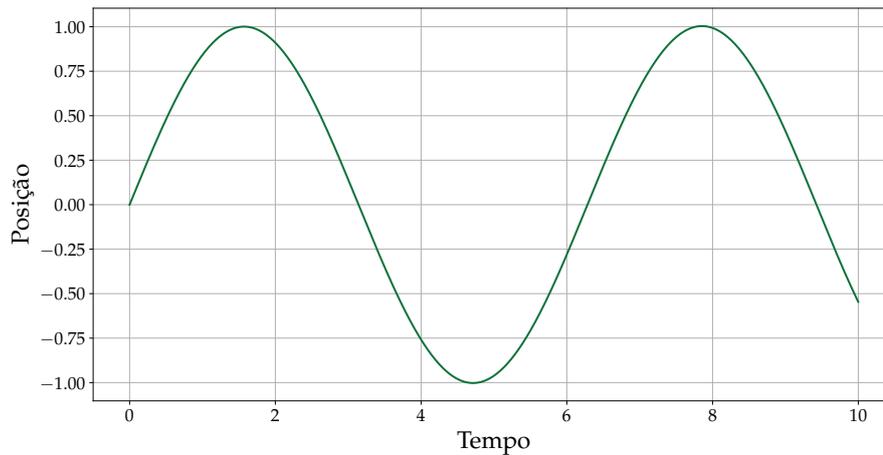
Por simplicidade, tomemos  $\omega = 1$  e as condições iniciais  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 1$ . Podemos implementar o método de Euler em alguma linguagem de programação e obter uma solução numérica, que pode então ser graficada. Uma implementação simples deste procedimento em Python está disponibilizada no Subapêndice B.1, e o gráfico obtido se encontra na Figura 18.

O gráfico na Figura 18 aparenta estar limitado a valores entre  $-1$  e  $1$  e oscila regularmente, com período pouco maior que 6. Além disso, sabemos que na origem a função se comporta como  $x(t) \approx t + \mathcal{O}(t^2)$ , dado que  $x(0) = 0$  e  $\dot{x}(0) = 1$ . Estas informações nos convidam a tomar a função seno como ansatz.

De fato, notamos que

$$\frac{d}{dt}(\sin \omega t) = \omega \cos \omega t, \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sin \omega t) = -\omega^2 \sin \omega t, \quad (\text{A.10})$$



**Figura 18.** Solução numérica em unidades arbitrárias para a equação diferencial do oscilador harmônico simples com parâmetros  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 1$ ,  $\omega = 1$  e passo  $\Delta t = 0.001$ . O código em Python utilizado para gerar a imagem está disponibilizado no Subapêndice B.1.

e portanto  $\sin \omega t$  é de fato solução da Eq. (A.2). De maneira semelhante, obtém-se que  $\cos \omega t$  é também solução. Pelo Exercício 88, temos então que

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad (\text{A.11})$$

é solução da Eq. (A.2). Como esta solução possui exatamente duas constantes arbitrárias, concluímos que esta é a solução geral\*.

Por mais que esta seja a solução geral, esta não é a única forma que podemos escrevê-la. Com um pouco de trigonometria, é possível obter expressões distintas, mas completamente equivalentes.

**Exercício 89:**

Mostre que a Eq. (A.11) pode ser escrita na forma

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{A.12})$$

para constantes  $A$  e  $\phi$  adequadas. ✚

## A.2 Números Complexos

Um caso particularmente interessante da Eq. (A.11) é quando tomamos  $a = 1$  e  $b = i$ , onde  $i$  denota a unidade imaginária, definida como  $i^2 = -1$ . Isto nos leva ao domínio dos

---

\*Estamos ignorando alguns detalhes importantes do processo. Por exemplo, esta é de fato a solução geral, mas isso se deve ao fato de que  $\cos \omega t$  e  $\sin \omega t$  são, na linguagem da Álgebra Linear, linearmente independentes. A solução  $a \cos \omega t + 2b \cos \omega t$  não é solução geral da Eq. (A.2) porque é possível escrever  $2 \cos \omega t$  como somas e produtos por constantes de  $\cos \omega t$ . Essencialmente,  $a \cos \omega t + 2b \cos \omega t$  tem na verdade apenas uma constante arbitrária, pois tomar  $a = 2$  e  $b = 0$  é equivalente a tomar  $a = 0$  e  $b = 1$ , por exemplo.

números complexos, que são os números com a forma  $z = x + iy$ , onde  $x$  e  $y$  são números reais. As somas e produtos de números complexos são definidas de maneira natural:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib)(c + id) = ac + ibc + iad + i^2bd = (ac - bd) + i(bc + ad). \quad (\text{A.13})$$

**\* Exercício 90:**

Seja  $z = x + iy$  um número complexo. Definimos seu conjugado por  $z^* = x - iy$ . Mostre que

- i.  $\text{Re}[z] \equiv x = \frac{1}{2}(z + z^*)$ ;
- ii.  $\text{Im}[z] \equiv y = \frac{1}{2i}(z - z^*)$ ;
- iii.  $|z|^2 \equiv zz^*$  é real e positivo;
- iv.  $|z| = 0$  se, e somente se,  $z = 0$ . ✖

O quociente de dois números complexos  $w$  e  $z$ , onde  $z \neq 0$ , pode então ser definido por

$$\frac{w}{z} = \frac{w z^*}{z z^*} = \frac{w z^*}{|z|^2}, \quad (\text{A.14})$$

onde a divisão agora é feita com relação a um número real, e portanto a operação já nos é familiar.

A princípio, tomar  $b = i$  não é permitido pelas hipóteses que fizemos até agora: estávamos lidando com números reais, e não sabemos como o Cálculo se comporta para os números complexos. Sob a crença de que isso pode ser formalizado\*, prosseguiremos.

Temos agora

$$z(t) = \cos \omega t + i \sin \omega t. \quad (\text{A.15})$$

Se as contantes complexas se comportarem da mesma forma que as reais sob diferenciação e integração, temos que

$$\dot{z}(t) = -\omega \sin \omega t + i\omega \cos \omega t, \quad = i\omega z(t) \quad (\text{A.16})$$

e

$$\ddot{z}(t) = -\omega^2 \cos \omega t - i\omega^2 \sin \omega t, \quad = -\omega^2 z(t). \quad (\text{A.17})$$

Logo,  $z(t)$  ainda soluciona a equação do oscilador harmônico simples. Ademais, vemos que  $z(t)$  é solução do problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}(t) = i\omega z(t), \\ z(0) = 1. \end{array} \right. \quad (\text{A.18})$$

---

\*Pode.

Para números reais, a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda x(t), x(0) = 1, \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

seria  $x(t) = e^{\lambda t}$ . Isso nos sugere que, em números complexos, ter-se-ia

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t. \quad (\text{A.20})$$

**Exercício 91:**

Suponha que séries de Taylor se comportam para constantes complexos da mesma maneira que se comportam para constantes reais. Expanda  $e^{it}$ ,  $\cos t$  e  $\sin t$  em séries de Taylor e conclua que, ao menos formalmente (embora não necessariamente rigorosamente), vale que

$$e^{it} = \cos t + i \sin t. \quad (\text{A.21})$$



Esta relação, conhecida como relação de Euler, é uma grande facilitadora de cálculos envolvendo trigonometria e números complexos e por vezes tomada como a própria definição da exponencial complexa\*.

Para mostrar o poder da relação de Euler, é útil termos alguns resultados preliminares.

**\* Exercício 92:**

Mostre que

- i.  $\cos t = \text{Re}[e^{it}]$ ;
- ii.  $\sin t = \text{Im}[e^{it}]$ ;
- iii.  $e^{-it} = (e^{it})^*$ ;
- iv.  $|e^{it}| = 1$ ;
- v.  $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ .



Com estes resultados, vemos que o cálculo de identidades trigonométricas se reduz a operações simples com exponenciais. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \text{Re}[e^{i(x+y)}], \\ &= \text{Re}[e^{ix}e^{iy}], \\ &= \text{Re}[(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)], \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Isto nos permite observar o oscilador harmônico de outro modo. Desta vez, podemos usar como ansatz para solucionar a Eq. (A.2) as funções complexas  $z(t) = e^{i\omega t}$  e  $z(t) = e^{-i\omega t}$ . Isto nos fornece a solução geral complexa

$$z(t) = ae^{i\omega t} + ibe^{-i\omega t}, \quad (\text{A.23})$$

---

\*Ver, por exemplo, [8].

cuja manipulação é consideravelmente mais simples. O fator  $i$  em frente ao segundo termo foi escolhido por questões de conveniência que logo serão elucidadas. Para obter a derivada, basta uma multiplicação por  $i\omega$  com um acerto de sinais para obter

$$\dot{z}(t) = i\omega a e^{i\omega t} + \omega b e^{-i\omega t}. \quad (\text{A.24})$$

Como em Física medimos posições e velocidades reais, não complexas, desejamos tratar quantidades reais no final do dia. Se as constantes  $a$  e  $b$  forem reais - o que é o caso quando impomos condições iniciais reais - para obter a posição real basta tomarmos a parte real de  $z$  e recuperar o resultado original e sua derivada, que são

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Re}[z(t)] = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \\ \dot{x}(t) &= \text{Re}[\dot{z}(t)] = -\omega a \sin \omega t + \omega b \cos \omega t. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Note que o fator  $i$  que introduzimos mais cedo permitiu que a expressão se tornasse tão simples assim. Sem ele, seria preciso um pouco de manipulação extra.

A parte imaginária possui uma interpretação semelhante. Ela fornece

$$y(t) = \text{Im}[z(t)] = a \sin \omega t + b \cos \omega t, \quad (\text{A.26})$$

que também resolve a equação diferencial do oscilador harmônico, porém com condições iniciais diferentes. Ao tratar o problema com números complexos, podemos resolver dois problemas distintos de uma vez só.

## B Códigos em Python

### B.1 Solução Numérica do Oscilador Harmônico Simples

```
# /usr/bin/python3
# -*- coding: utf-8 -*-

#####
# Oscilador Harmônico Simples - Método de Euler
# Mecânica Clássica
# Mini-Escola de Inverno 2020
# Dead Physicists Society
# Níckolas de Aguiar Alves
#####
"""
Oscilador Harmônico Simples - Método de Euler
Mecânica Clássica
Mini-Escola de Inverno 2020
Dead Physicists Society

@author: Níckolas de Aguiar Alves
```

```

"""
from pylab import * # bibliotecas para matemática e gráficos
plt.rcParams.update({
    "text.usetex": True,
    "font.family": "serif",
    "font.serif": ["Palatino"],
    "font.size": 16,
})

def euler(x_0, v_0, w, dt, N):
    """
    Método de Euler para o OHS. Recebe posição e velocidade iniciais
    → x_0 e v_0, frequência w, passo dt e número de iterações N. A função
    → retorna um array bidimensional com os pares (posição, instante de
    → tempo).
    """
    t = np.float64(0) # tempo inicial t=0
    x = np.zeros(shape=(N, 2)) # lista de posições
    v = np.zeros(shape=(N, 2)) # lista de velocidades

    x[0] = np.array([x_0, t]) # posição inicial
    v[0] = np.array([v_0, t]) # velocidade inicial
    for n in range(1, N):
        t += dt #atualiza o tempo
        v[n] = np.array([v[n-1][0] - (w**2)*x[n-1][0]*dt, t])
            → #atualiza a velocidade
        x[n] = np.array([x[n-1][0] + v[n-1][0]*dt, t]) #atualiza a
            → posição
    return x

def plotting(movimento):
    """
    Recebe um array com o formato do output da função euler e retorna
    → o gráfico de posição por instante de tempo.
    """
    fig, ax = plt.subplots(figsize = (12,8)) #cria o ambiente de
        → figura
    ax.grid() #adiciona um grid à figura
    x = movimento # lista de posições
    ax.plot(x[:,1], x[:,0], linewidth = 1.8, color="#0D723B") #
        → grafica x(t)
    ax.set_xlabel("Tempo", fontsize=22) # adiciona um label ao eixo
        → horizontal

```

```

ax.set_ylabel("Posição", fontsize=22) # adiciona um label ao eixo
    ↪ horizontal
show()
return

def main():
    dt = 0.001 # passo de tempo
    T = 10 # tempo total de simulação
    N = int(T/dt) # número de iterações definido a partir do passo e
    ↪ do tempo total
    plotting(euler(0, 1, 1, dt, N)) # calcular e graficar
    return

main()

```

## B.2 Espaço de Fases do Pêndulo Simples

```

# /usr/bin/python3
# -*- coding: utf-8 -*-

#####
# Espaço de Fases do Pêndulo Simples - Método de Euler
# Mecânica Clássica
# Mini-Escola de Inverno 2020
# Dead Physicists Society
# Nickolas de Aguiar Alves
#####
"""
Espaço de Fases do Pêndulo Simples - Método de Euler
Mecânica Clássica
Mini-Escola de Inverno 2020
Dead Physicists Society

@author: Nickolas de Aguiar Alves
"""
from pylab import * # bibliotecas para matemática e gráficos
plt.rcParams.update({
    "text.usetex": True,
    "font.family": "serif",
    "font.serif": ["Palatino"],
    "font.size": 16,
})

def euler(q_0, p_0, m, g, l, dt, N, epsilon):

```

```

"""
Método de Euler para o Pêndulo Simples. Recebe posição e momento
↪ iniciais x_0 e p_0, parâmetros m, g, l, passo dt, número de iterações
↪ N e precisão epsilon. O algoritmo para caso a distância entre o último
↪ ponto calculado e a condição inicial seja menor que epsilon. A função
↪ retorna um par composto por um array bidimensional com os trios
↪ (posição, momento, tempo) e pelo ponto em que a coordenada ultrapassou
↪ pi ou -pi.
"""

```

```

t = np.float64(0) # tempo inicial t=0
phase = np.zeros(shape=(N, 3)) # array de fases
a = N-1
phase[0] = np.array([q_0, p_0, t]) # condições iniciais
for n in range(1, N):
    t += dt #atualiza o tempo
    phase[n] = np.array([phase[n-1][0] +
        ↪ (1/(m*l**2))*phase[n-1][1]*dt, phase[n-1][1] -
        ↪ m*g*l*np.sin(phase[n-1][0])*dt, t])
    ↪ #atualização
    if phase[n][0] < -np.pi: # se q < - pi, podemos somar 2 pi
        ↪ para manter o angulo entre -pi e pi
            phase[n][0] += 2*np.pi
            a = n
    elif phase[n][0] > np.pi: # se q > + pi, podemos subtrair
        ↪ 2 pi para manter o angulo entre -pi e pi
            phase[n][0] -= 2*np.pi
            a = n
    if n > 0.1*N and ((phase[n][0] - q_0)**2 + (phase[n][1] -
        ↪ p_0)**2) < epsilon:
            phase = phase[~np.all(phase==0, axis=1)] # remove
            ↪ linhas desnecessárias com valor zero
            break
return (phase, a)

```

```

def plotting(lista):

```

```

"""
Recebe uma lista de triplas com o formato do output da função
↪ euler e retorna o gráfico do espaço de fases.
"""

```

```

fig, ax = plt.subplots(figsize = (12,8)) #cria o ambiente de
↪ figura
ax.grid() #adiciona um grid à figura
for tup in lista:

```

```

    phase = tup[0]
    a = tup[1]
    ax.plot(phase[:a,0], phase[:a,1], linewidth = 1.8,
            ↪ color="#0D723B") # grafica a curva no espaço de fases
            ↪ antes de atingir a condição de contorno em +- pi
    ax.plot(phase[a:,0], phase[a:,1], linewidth = 1.8,
            ↪ color="#0D723B") # grafica a curva no espaço de fases
            ↪ após atingir a condição de contorno em +- pi
ax.set_xlabel("Posição", fontsize=22) # adiciona um label ao eixo
    ↪ horizontal
ax.set_ylabel("Momento", fontsize=22) # adiciona um label ao eixo
    ↪ horizontal
show()
return

```

```
def main():
```

```

    dt = 0.0001 # passo de tempo
    T = 20 # tempo total de simulação
    N = int(T/dt) # número de iterações definido a partir do passo e
        ↪ do tempo total
    m = 1 # massa
    g = 1 # aceleração da gravidade
    l = 1 # comprimento do pêndulo
    condicoes = [(0,-3), (0,-2.5), (0,-2.1), (0,0.5), (0,1), (0,1.5),
                ↪ (0,1.9), (0,1.999), (0,2.1), (0,2.5), (0,3)] # condições
                ↪ iniciais a serem utilizadas
    lista = []
    for cond in condicoes:
        lista.append(euler(cond[0], cond[1], m, g, l, dt, N, dt))
    plotting(lista) # calcular e graficar
return

```

```
main()
```

### B.3 Espaço de Fases do OHS – Método de Euler

```

# /usr/bin/python3
# -*- coding: utf-8 -*-

```

```

#####
# Espaço de Fases do Pêndulo Simples - Método de Euler
# Mecânica Clássica
# Mini-Escola de Inverno 2020
# Dead Physicists Society

```

```

# Nickolas de Aguiar Alves
#####
"""
Espaço de Fases do Oscilador Harmônico - Método de Euler
Mecânica Clássica
Mini-Escola de Inverno 2020
Dead Physicists Society

@author: Nickolas de Aguiar Alves
"""
from pylab import * # bibliotecas para matemática e gráficos
plt.rcParams.update({
    "text.usetex": True,
    "font.family": "serif",
    "font.serif": ["Palatino"],
    "font.size": 16,
})

def euler(q_0, p_0, m, w, dt, N, epsilon):
    """
    Método de Euler para o Oscilador Harmônico. Recebe posição e
    → momento iniciais x_0 e p_0, parâmetros m, w, passo dt, número de
    → iterações N e precisão epsilon. O algoritmo para caso a distância
    → entre o último ponto calculado e a condição inicial seja menor que
    → epsilon. A função retorna um par composto por um array bidimensional
    → com os trios (posição, momento, tempo) e pelo ponto em que a
    → coordenada ultrapassou pi ou -pi.
    """
    t = np.float64(0) # tempo inicial t=0
    phase = np.zeros(shape=(N, 3)) # array de fases
    phase[0] = np.array([q_0, p_0, t]) # condições iniciais
    for n in range(1, N):
        t += dt #atualiza o tempo
        phase[n] = np.array([phase[n-1][0] +
            → (1/m)*phase[n-1][1]*dt, phase[n-1][1] -
            → m*w*phase[n-1][0]*dt, t]) #atualização
    return phase

def plotting(lista):
    """
    Recebe uma lista de triplas com o formato do output da função
    → euler e retorna o gráfico do espaço de fases.
    """

```

```

fig, ax = plt.subplots(figsize = (12,8)) #cria o ambiente de
↳ figura
ax.grid() #adiciona um grid à figura
for phase in lista:
    ax.plot(phase[:,0], phase[:,1], linewidth = 1.8,
            ↳ color="#0D723B") # grafica a curva no espaço de fases
ax.set_xlabel("Posição", fontsize=22) # adiciona um label ao eixo
↳ horizontal
ax.set_ylabel("Momento", fontsize=22) # adiciona um label ao eixo
↳ horizontal
show()
return

```

```

def main():
    dt = 0.01 # passo de tempo
    T = 20 # tempo total de simulação
    N = int(T/dt) # número de iterações definido a partir do passo e
    ↳ do tempo total
    m = 1 # massa
    w = 1 # frequencia
    condicoes = [(0,0.5), (0,1), (0,1.5), (0,2), (0,2.5), (0,3)] #
    ↳ condições iniciais a serem utilizadas
    lista = []
    for cond in condicoes:
        lista.append(euler(cond[0], cond[1], m, w, dt, N, dt))
    plotting(lista) # calcular e graficar
    return

```

main()

#### B.4 Espaço de Fases do OHS – Método de Euler–Cromer

```

# /usr/bin/python3
# -*- coding: utf-8 -*-

```

```

#####
# Espaço de Fases do Pêndulo Simples - Método de Euler-Cromer
# Mecânica Clássica
# Mini-Escola de Inverno 2020
# Dead Physicists Society
# Níckolas de Aguiar Alves
#####

```

"""

Espaço de Fases do Oscilador Harmônico - Método de Euler-Cromer

Mecânica Clássica  
Mini-Escola de Inverno 2020  
Dead Physicists Society

@author: Níckolas de Aguiar Alves

```
"""  
from pylab import * # bibliotecas para matemática e gráficos  
plt.rcParams.update({  
    "text.usetex": True,  
    "font.family": "serif",  
    "font.serif": ["Palatino"],  
    "font.size": 16,  
})  
  
def eulercromer(q_0, p_0, m, w, dt, N, epsilon):  
    """  
    Método de Euler-Cromer para o Oscilador Harmônico. Recebe posição  
    → e momento iniciais x_0 e p_0, parâmetros m, w, passo dt, número de  
    → iterações N e precisão epsilon. O algoritmo para caso a distância  
    → entre o último ponto calculado e a condição inicial seja menor que  
    → epsilon. A função retorna um par composto por um array bidimensional  
    → com os trios (posição, momento, tempo) e pelo ponto em que a  
    → coordenada ultrapassou pi ou -pi.  
    """  
    t = np.float64(0) # tempo inicial t=0  
    phase = np.zeros(shape=(N, 3)) # array de fases  
    phase[0] = np.array([q_0, p_0, t]) # condições iniciais  
    for n in range(1, N):  
        t += dt #atualiza o tempo  
        p = phase[n-1][1] - m*w*phase[n-1][0]*dt  
        phase[n] = np.array([phase[n-1][0] + (1/m)*p*dt, p, t])  
        → #atualização  
    return phase  
  
def plotting(lista):  
    """  
    Recebe uma lista de triplas com o formato do output da função  
    → euler e retorna o gráfico do espaço de fases.  
    """  
    fig, ax = plt.subplots(figsize = (12,8)) #cria o ambiente de  
    → figura  
    ax.grid() #adiciona um grid à figura  
    for phase in lista:
```

```

    ax.plot(phase[:,0], phase[:,1], linewidth = 1.8,
            ↪ color="#0D723B") # grafica a curva no espaço de fases
ax.set_xlabel("Posição", fontsize=22) # adiciona um label ao eixo
    ↪ horizontal
ax.set_ylabel("Momento", fontsize=22) # adiciona um label ao eixo
    ↪ horizontal
show()
return

```

```

def main():
    dt = 0.01 # passo de tempo
    T = 20 # tempo total de simulação
    N = int(T/dt) # número de iterações definido a partir do passo e
    ↪ do tempo total
    m = 1 # massa
    w = 1 # frequência
    condicoes = [(0,0.5), (0,1), (0,1.5), (0,2), (0,2.5), (0,3)] #
    ↪ condições iniciais a serem utilizadas
    lista = []
    for cond in condicoes:
        lista.append(eulercromer(cond[0], cond[1], m, w, dt, N,
            ↪ dt))
    plotting(lista) # calcular e graficar
return

```

```
main()
```

## C Exercícios Finais

A maior parte deste texto é consideravelmente teórica, e inclui poucos exemplos e exercícios com problemas envolvendo mais cálculos. Por isso, incluo este apêndice com uma lista de problemas. Não há método específico de solução para cada um. Utilize as técnicas que achar mais convenientes. Note que resolver o mesmo problema por meio de um conjunto de técnicas (como o oscilador harmônico) pode servir como forma de averiguar se está tomando os procedimentos corretos e mesmo obter uma compreensão mais profunda sobre o problema em si.

Existem diversos assuntos sobre Mecânica que não fomos capazes de cobrir neste curto curso, o que dificulta um pouco a escolha dos exercícios. Por sorte, este não é um curso formal, que requer que os alunos resolvam provas sozinhos ou algo do tipo. Colaboração com colegas na compreensão dos exercícios é incentivada, tal qual a consulta a referências. Alguns dos problemas aqui apresentados podem ser entendidos de maneira mais simples se forem utilizadas técnicas que não mencionamos. Problemas na vida

real não se restringem apenas ao material que você já estudou em cursos. Consulte as referências, discuta com colegas, e sinta-se à vontade para me pedir ajuda se precisar.

Decidi também manter a filosofia de evitar dizer quando é preciso fazer alguma aproximação para resolver o problema, ou quando é melhor tratá-lo numericamente, etc. Não me lembro se já experienciei algo do tipo em algum curso que eu tenha feito, mas acho que não, o que é certamente uma pena. O Universo raramente traz instruções do tipo “Considere apenas pequenas oscilações”.

**Exercício 93:**

Considere uma partícula se movendo em uma dimensão sob a ação do potencial

$$V(q) = \frac{q^4}{4} + \frac{kq^2}{2}. \quad (\text{C.1})$$

Encontre os pontos de equilíbrio, classifique-os como estáveis ou instáveis e encontre as frequências de pequenas oscilações. ❖

**Exercício 94:**

Considere uma partícula se movendo sob a ação dum potencial central. Seja  $\mathbf{p}$  seu momento linear\* e  $\mathbf{r}$  sua posição. Mostre que o momento angular  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  é conservado. ❖

**Exercício 95:**

Uma partícula se move sob a ação do potencial

$$V(q) = \frac{k}{q^2}. \quad (\text{C.2})$$

Dadas condições iniciais  $q(0)$  e  $\dot{q}(0)$  (ou  $p(0)$ , à sua escolha), obtenha  $q(t)$ . ❖

**Exercício 96:**

Considere a Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\phi, \quad (\text{C.3})$$

onde  $\phi$  e  $\mathbf{A}$  são funções dadas do espaço e do tempo. Mostre que as equações de movimento descrevem a força de Lorentz,

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (\text{C.4})$$

onde  $\mathbf{v}$  é a velocidade da partícula e os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  são dados por

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (\text{C.5})$$

**Exercício 97:**

Reduza a quadraturas o problema do pêndulo esférico: uma partícula se movendo em três dimensões sob o vínculo  $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ , para alguma constante  $l$ , e sob a ação de um campo gravitacional uniforme com intensidade  $g$ . ❖

\*Isto é, o vetor cujas componentes são os momentos canonicamente conjugados às coordenadas cartesianas

**Exercício 98** [Problema de Kepler]:

Considere uma partícula se movendo sob a ação de um potencial central com a forma

$$V(r) = -\frac{k}{r}. \quad (\text{C.6})$$

Seja  $m$  a massa da partícula,  $\mathbf{p}$  seu momento linear e  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  seu momento angular. Mostre que  $\mathbf{L}$  e  $L^2 = \|\mathbf{L}\|^2$  são quantidades conservadas. Mostre que o vetor de Laplace-Runge-Lenz, definido como

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\hat{\mathbf{r}}, \quad (\text{C.7})$$

é uma quantidade conservada.

Considere a quantidade  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = rA \cos \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo formado entre o vetor de Laplace-Runge-Lenz e o vetor posição. Mostre que as trajetórias para o problema de Kepler são descritas por

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{L^2} \left( 1 + \frac{A}{mk} \cos \theta \right). \quad (\text{C.8})$$

Conclua que o movimento é limitado apenas para energias negativas. ✠

**Exercício 99:**

Considere o problema de um pêndulo elástico, em que o bastão rígido de um pêndulo é substituído por uma mola de constante  $k$ . Considere que seu movimento está restrito a um único plano, de modo que o sistema tenha dois graus de liberdade. Obtenha as equações de movimento e os pontos de equilíbrio. ✠

**Exercício 100:**

Decida se são canônicas as transformações

- i.  $Q = q^2, P = \frac{p}{2q}$ ;
- ii.  $Q = \cos q - 1, P = -\frac{p}{\sin q}$ ;
- iii.  $q = Qe^{-P}, p = e^P$ ;
- iv.  $Q = p, P = q$ ;
- v.  $Q = q + (1 - P^2), P = p - \sin(2\pi q)$ ;
- vi.  $Q = q + (1 - p^2), P = p - \sin(2\pi q)$ ;
- vii.  $q = Q + P, p = Q - P$ ;
- viii.  $Q = q + ap, P = p - a(q^3 + kq^2)$ ;
- ix.  $Q = q + aP, P = p - a(q^3 + kq^2)$ . ✠