As Time Goes By

Em busca das soluções das Equações de Maxwell

Níckolas Alves
Instituto de Física da Universidade de São Paulo
Departamento de Física Matemática
`alves.nickolas@usp.br`

Resumo

O Eletromagnetismo se propõe a determinar as forças de caráter elétrico e magnético que agem sobre partículas e corpos carregados. Isto é feito encontrando os campos elétrico e magnético, descritos pelas chamadas Equações de Maxwell, e então obtendo a Força de Lorentz a partir de tais campos. Desta forma, a solução das Equações de Maxwell ocupa uma posição central no Eletromagnetismo. Neste trabalho apresenta-se de forma breve e intuitiva as ideias básicas por trás da obtenção das Equações de Jefimenko, que constituem a solução geral das Equações de Maxwell com distribuições de cargas e correntes finitas ou com decaimento suficientemente rápido para distâncias infinitas.

Introdução

É extremamente frequente o uso das chamadas equações diferenciais para a descrição de fenômenos físicos. Enquanto equações algébricas possuem números como soluções, equações diferenciais possuem funções como soluções. Além disso, estas equações descrevem o comportamento local das suas soluções. Isto é, descrevem o quão inclinadas e curvadas são estas soluções, por exemplo.

Em problemas de Eletromagnetismo, lida-se com funções razoavelmente complicadas, visto que a cada ponto do espaço elas atribuem um vetor. Para a descrição destas funções em termos de equações diferenciais, é preciso descrever onde estes campos de vetores divergem e onde rotacionam (Figura 1). Neste trabalho, denotamos vetores em negrito e escalares em fonte usual.

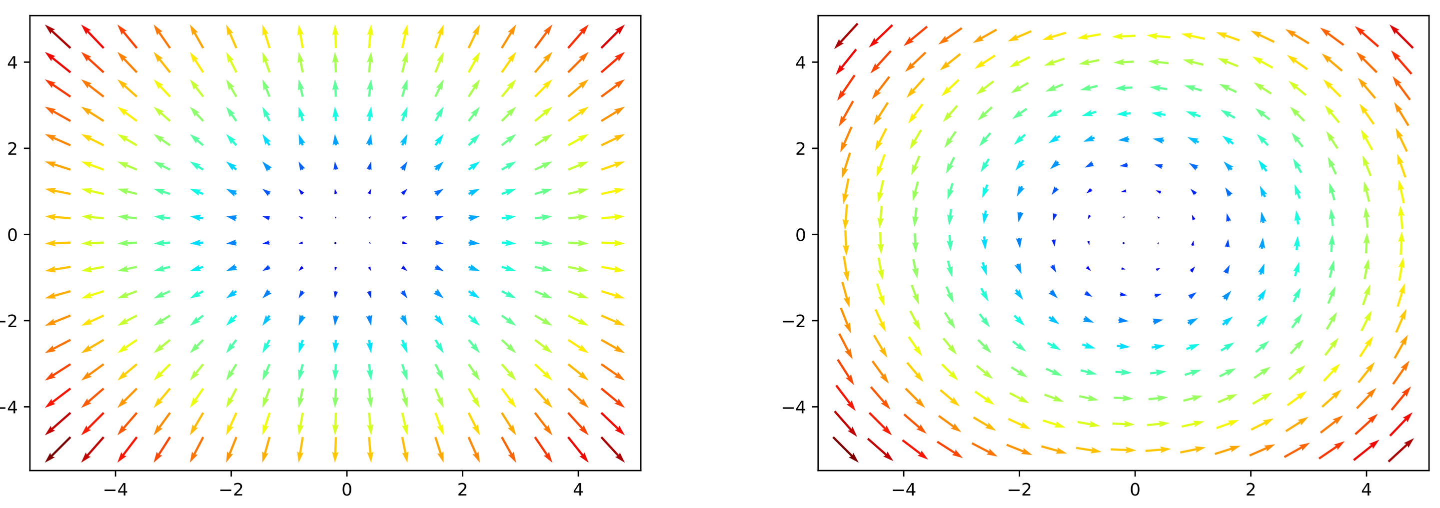

Figura 1: Exemplos de campo que diverge, mas não rotaciona, e que rotaciona, mas não diverge.

As Equações de Maxwell descrevem onde e como os campos elétrico e magnético divergem e rotacionam de acordo com as distribuições de cargas e correntes elétricas e com a variação um do outro:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0, \\ \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \\ \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases} \tag{1}$$

Na linguagem do cálculo vetorial, o símbolo $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}$ denota a função que nos diz quanto o campo $\mathbf{F}$ diverge em cada ponto e o símbolo $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}$ denota a função que nos diz quanto e em torno de qual eixo o campo $\mathbf{F}$ rotaciona em cada ponto. O símbolo $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}$ representa como o campo $\mathbf{F}$ muda com o passar do tempo. Nas Equações de Maxwell, $\mathbf{E}$ é o campo elétrico, $\mathbf{B}$ é o campo magnético, ρ é a função que nos informa quanta carga está presente em cada ponto de espaço e $\mathbf{J}$ é a função que nos informa a corrente que passa por cada ponto no espaço. As constantes μ_0 e ϵ_0 descrevem as propriedades eletromagnéticas do vácuo.

Potenciais Eletrodinâmicos

Ter as Equações de Maxwell ainda não significa que conhecemos os campos elétrico e magnético de um determinado problema, ainda é preciso fornecermos as cargas e correntes e resolver as Equações de Maxwell. Ou seja, conhecendo como os campos rotacionam e divergem, obter o campo em si (também vamos assumir que os campos valem zero no infinito, onde estão longe de todas as cargas e correntes).

Para obter esta solução, utilizaremos a formulação potencial da Eletrodinâmica. Uma das informações que as Equações de Maxwell nos dão é que existem funções V e $\mathbf{A}$ tais que

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}V - \dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}. \end{cases} \tag{2}$$

O símbolo $\boldsymbol{\nabla}F$ denota a função vetorial que, em todo ponto do espaço, aponta para a direção em que a função F cresce mais rápido (ou seja, está mais inclinada).

Calcular $\boldsymbol{\nabla}V$, $\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ e $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$ quando se conhece V e $\mathbf{A}$ é um trabalho simples, e como V é escalar é muito mais simples encontrá-lo do que encontrar $\mathbf{E}$ diretamente. Assim, o problema de encontrar os campos eletromagnéticos se reduziu ao problema de encontrar os potenciais escalar e vetorial.

Utilizando um pouco de cálculo e álgebra vetorial, pode-se mostrar que, sob certas condições,

$$\begin{cases} \nabla^2 V - \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla^2\mathbf{A} - \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{J}, \end{cases} \tag{3}$$

onde $\nabla^2 F = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}F)$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)$.

As Equações (3) são conhecidas como equações de onda. Elas nos dizem que os potenciais oscilam de forma semelhante a ondas em uma lagoa, sendo que as cargas e correntes agem como pedras caindo na água e forçando oscilações. Além disso, a Equação de Onda é bem compreendida atualmente, e podemos mostrar que as soluções das Equações (3) são

$$\begin{cases} V(\mathbf{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{\mathscr{r}}{c}\right)}{\mathscr{r}}\,d\tau', \\ \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{\mathscr{r}}{c}\right)}{\mathscr{r}}\,d\tau'. \end{cases} \tag{4}$$

Acima, $\mathbf{r}$ é o lugar onde estamos medindo o valor e direção dos campos eletromagnéticos, $\mathbf{r}'$ é a posição de uma carga ou onde estamos medindo uma corrente, $\boldsymbol{\mathscr{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. O símbolo $\int d\tau'$ denota que estamos somando os campos devidos a muitas cargas e correntes muito pequenas. c é a velocidade da luz no vácuo, e vale que $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$.

O termo $t - \frac{\mathscr{r}}{c}$ significa, fisicamente, que é preciso um certo tempo para que a informação sobre as cargas em um ponto se propague até outro. Além disso, essa informação se propaga na velocidade da luz, c. Contudo, isso ainda não possui um significado tão profundo, pois o que nos interessa não são os potenciais V e $\mathbf{A}$, mas sim os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$

Ondas Eletromagnéticas e Equações de Jefimenko

Aplicando o operador $\boldsymbol{\nabla}\times$ nas duas últimas Equações de Maxwell e manipulando um pouco o que for obtido, podemos mostrar que os campos eletromagnéticos também satisfazem equações de onda! Mais especificamente, vale que

$$\begin{cases} \nabla^2\mathbf{E} - \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\epsilon_0}\boldsymbol{\nabla}\rho + \mu_0\dfrac{\partial\mathbf{J}}{\partial t}, \\ \nabla^2\mathbf{B} - \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{J}. \end{cases} \tag{5}$$

Note que as "pedras" que causam as oscilações dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ não são as cargas e correntes em si, mas sim coisas como o quanto elas giram, mudam com o tempo e crescem. Se escrevermos $\lfloor F\rfloor \equiv F\left(\mathbf{r}', t - \frac{\mathscr{r}}{c}\right)$ para abreviar a notação, métodos análogos aos usados para os potenciais e algumas manipulações matemáticas nos permitem obter as Equações de Jefimenko:

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\lfloor\rho\rfloor + \dfrac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{c\mathscr{r}}\left\lfloor\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\right\rfloor - \dfrac{1}{c^2\mathscr{r}}\left\lfloor\dfrac{\partial\mathbf{J}}{\partial t}\right\rfloor d\tau', \\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \left[\dfrac{1}{\mathscr{r}^2}\lfloor\mathbf{J}\rfloor + \dfrac{1}{c\mathscr{r}}\left\lfloor\dfrac{\partial\mathbf{J}}{\partial t}\right\rfloor\right]\times\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}\,d\tau'. \end{cases} \tag{6}$$

Estas equações constituem a solução geral das Equações de Maxwell para cargas e correntes que se anulam no infinito suficientemente rápido.

Comentários Finais

- As Equações de Jefimenko recuperam as conhecidas Leis de Coulomb e Biot-Savart da Eletrostática e Magnetostática para distribuições de cargas e correntes estáticas.
- Percebe-se os efeitos da finitude da velocidade da luz quando vemos que os campos são gerados por cargas e correntes em retardo (o campo no instante t é gerado pelas cargas e correntes no instante $t' = t - \frac{\mathscr{r}}{c}$). Se a velocidade da luz fosse infinita, ter-se-ia $t' = t$.
- Os campos elétrico e magnético são gerados de maneira independente por cargas e correntes; a relação cíclica sugerida pelas Leis de Faraday e Ampère-Maxwell é apenas uma coincidência devida à influência das correntes elétricas no campo elétrico.
- As soluções apresentadas descrevem apenas as oscilações forçadas por cargas e correntes, não possíveis campos criados durante o Big Bang (condições iniciais).

Desenvolvimentos Futuros

As Equações de Jefimenko solucionam as Equações de Maxwell microscópicas, ou seja, são de difícil aplicação para casos como materiais polarizados ou magnetizados, além de não serem válidas no espaço-tempo curvo. A generalização dos resultados requer um trabalho teórico mais aprofundado, pois as equações diferenciais envolvidas são de resolução consideravelmente mais complexa que as aqui apresentadas.

Referências

[1] Griffiths, D. J., *Introduction to Electrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2017).

[2] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, Danvers, 1999).

[3] Lemos, N. A., *Intuição física e generalização das leis de Coulomb e de Biot-Savart para o caso dependente do tempo*, Revista Brasileira de Ensino de Física **27**, 385 (2005).

Agradecimentos

Expresso cá minha gratidão para com meu orientador, João Carlos Alves Barata, e meu amigo Victor Bernardo Chabu por seu apoio e valiosas conversas acerca deste trabalho. Seus conselhos me guiaram através dos caminhos que estavam além do alcance de livros e mero cálculo vetorial.

Ademais, sou grato a meus amigos por seu apoio e gentileza intermináveis e, especialmente, por seus enriquecedores comentários acerca do seminário que me deu a vontade original de iniciar este projeto.

Por fim, agradeço ao Instituto de Física pelo suporte para a apresentação deste trabalho e às pessoas que me incentivaram ou auxiliaram a fundar a Dead Physicists Society. A estas eu devo o tema de minhas próximas pesquisas.